Banach空间上线性算子的伪条件数与最小模*

孙传崑

（四川绵阳师范专科学校）

本文用算子的最小模来估计伪条件数$\omega_i(A)$（见〔1〕〔2〕）。主要结果是$\omega_i(A)\geq\|A\|/\gamma(A)$（$i=1,2$）和$\omega_i(A)=\|A\|/\gamma(A)$（$i=3,4$）。由此得出判断$\omega_i(A)=\widetilde{K}(A)$的一个简单而有用的定理，它包含了〔2〕的结果．顺便也肯定地回答了〔2〕中所提出的问题．

在本文中X、Y是Banach空间，$A\in$〔X，Y〕，A的最小模$\gamma(A)=\inf\{\|Ax\|;\ \rho(x,N(A))=1\}$．文中用到$\gamma(A)$的性质见〔3，pp 94—100〕

定理1 设$A\in$〔X，Y〕，$m(A)=\inf\{\|Ax\|;\ \|x\|=1\}>0$．那么$\rho(A,\mathrm{M}_0\cap\mathrm{N}_0)=\rho(A,\mathrm{M}_0)=m(A)$．其中$\mathrm{M}_0=\{B\in$〔X，Y〕；$m(B)=0\}$，$\mathrm{N}_0=\{B\in$〔X，Y〕；$m(B^*)=0\}$，$\rho(A,\mathrm{M})$表示$A$到算子集M的距离．

证明 （i）显然$\rho(A,\mathrm{M}_0\cap\mathrm{N}_0)\geq\rho(A,\mathrm{M}_0)$

（ii）设$S\in$〔X，Y〕，$\|S\|<m(A)$；$\forall x\in$ X，$\|(A+S)x\|\geq\|Ax\|-\|Sx\|\geq(m(A)-\|S\|)\|x\|$，故$m(A+S)>0$．这就证明了$\rho(A,\mathrm{M}_0)\geq m(A)$．

（iii）$\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in$ X，$\|x_\varepsilon\|=1$，$Ax_\varepsilon=y_\varepsilon$，有$m(A)\leq\|y_\varepsilon\|<m(A)+\varepsilon$．取$y_0'\in$ Y*，使$y_0'(y_\varepsilon)\neq0$，记$A^*y_0'=x_0'$，则$x_0'(x_\varepsilon)\neq0$．从而有$x_\varepsilon'\in$ X*，$\|x_\varepsilon'\|=1$，$x_\varepsilon'(x_\varepsilon)=1$且使$N(x_\varepsilon')=N(x_0')$．

$\forall x\in$ X，令$Sx=-x_\varepsilon'(x)y_\varepsilon$，则$S\in$〔X，Y〕，再记$B=A+S$．由于$Bx_\varepsilon=Ax_\varepsilon-x_\varepsilon'(x_\varepsilon)y_\varepsilon=0$．则$m(B)=0$．$B\in\mathrm{M}_0$．$\forall x\in$ X，设$x=ax_\varepsilon+z$，其中$z\in N(x_\varepsilon')=N(x_0')$．那么$y_0'(Bx)=x_0'(x)-x_0'(x_\varepsilon)x_\varepsilon'(x)=ax_0'(x_\varepsilon)-x_0'(x_\varepsilon)a=0$．即$B^*y_0'=0$．故$m(B^*)=0$．所以$B\in\mathrm{M}_0\cap\mathrm{N}_0$．

由于$\|B-A\|=\|S\|=\|y_\varepsilon\|\|x_\varepsilon'\|<m(A)+\varepsilon$．因此$m(A)\geq\rho(A,\mathrm{M}_0\cap\mathrm{N}_0)$．

说明：当Y＝X时，$\rho(A,\mathrm{M}_0)=m(A)$这一结果为Makai，E和Zemanek，J所证明（见〔4〕）．本定理将此结果予以改进．

在〔1〕中记$\mathrm{L}_1=\{B\in$〔X，Y〕；B无左逆$\}$，$\mathrm{L}_2=\{B\in$〔X，Y〕；B无右逆$\}$．显然$\mathrm{M}_0\subseteq\mathrm{L}_1$，$\mathrm{N}_0\subseteq\mathrm{L}_2$．故有

推论：（i）若$m(A)>0$，则$\rho(A,\mathrm{L}_1)\leq m(A)=\gamma(A)$．

（ii）若$m(A^*)>0$，则$\rho(A,\mathrm{L}_2)\leq m(A^*)=\gamma(A)$．

并且还不难看出，倘若再附加条件：Y（X）的每一个闭子空间有拓扑余；或者Y（X）是Hilbert空间；或者X（Y）具有扩张（提升）性质（〔5，pp33—34〕），推论中等号成立．

* 1984年6月11日收到．

引理：设$B\in[X,\ Y]$，M是X的闭子空间，$M\subseteq\mathscr{N}(B)$．B_0是B在商空间X/M上诱导的算子，即由$B_0([x])=Bx$所定义．（其中$[x]=x+M$，由于$M\subseteq\mathscr{N}(B)$，B_0是有意义的．）那么

（ i ）$B_0\in[X/M,\ Y]$．（ii）$\mathscr{R}(B_0)=\mathscr{R}(B)$．（iii）$\|B_0\|=\|B\|$．（iv）$B_0$是1—1的当且仅当$M=\mathscr{N}(B)$．

这些结果都是显然的，证明从略．

定理2：若$\gamma(A)>0$，则$\rho(A,\ L_3)=\gamma(A)$，$\rho(A,\ L_4)=\gamma(A)$．这里$L_3=\{B\in[X,\ Y];\ \mathscr{N}(B)\supset\mathscr{N}(A)\}$；$L_4=\{B\in[X,\ Y];\ \mathscr{N}(B)\supset\mathscr{N}(A)$ 或$\overline{\mathscr{R}(B)}\subset\mathscr{R}(A)\}$．记号"$\supset$"和"$\subset$"均指真包含．

证明：取$M=\mathscr{N}(A)$．由引理，$A_0\in[X/M,\ Y]$，$m(A_0)>0$．由定理1(iii)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists B_0\in[X/M, Y]$，B_0不是1—1的，而$\|B_0-A_0\|<m(A_0)+\varepsilon=\gamma(A)+\varepsilon$．$\forall x\in X$，令$Bx=B_0([x])$，则$B\in[X,\ Y]$，并且$B$在X/M上诱导的算子就是$B_0$．故$\mathscr{N}(B)\supset\mathscr{N}(A)$，$B\in L_3$．由此得到$\rho(A,\ L_3)\leq\gamma(A)$．倘若$\rho(A,\ L_3)<\gamma(A)$，则$\exists C\in L_3$，使$\|C-A\|<\gamma(A)$，记$C-A=S$，应有$\mathscr{N}(S)\supseteq\mathscr{N}(A)$．故$\|S_0\|=\|S\|<\gamma(A)=m(A_0)$．由定理1 (ii)，$m(A_0+S_0)=m(C_0)>0$．从而$\mathscr{N}(C)=\mathscr{N}(A)$．得出矛盾．这就证明了$\rho(A,\ L_3)=\gamma(A)$．

记$L_4'=\{B\in[X,\ Y],\ \overline{\mathscr{R}(B)}\subset\mathscr{R}(A)\}$，则对偶地可以证明$\rho(A,\ L_4')=\gamma(A)$．再由$L_4=L_3\cup L_4'$，及上述结果推出$\rho(A,\ L_4)=\gamma(A)$．

在〔1〕中，分别对$i=1,2,3,4$，定义伪条件数$\omega_i(A)=\|A\|/\rho(A,\ L_i)$并且证明了当$A$有广义逆$A^+$时，$\omega_i(A)\leq\widetilde{K}(A)=\|A\|\|A^+\|$．于是我们就有：

定理3　$\omega_i(A)\geq\|A\|/\gamma(A)$，当$i=3.4$时，等号成立．

定理4　设$A\in[X,\ Y]$有广义逆A^+，若$\|A^+\|^{-1}=\gamma(A)$，则$\omega_i(A)=\widetilde{K}(A)=\|A\|\|A^+\|$．当$i=3.4$时，条件还是必要的．

定理4包含了〔2〕的结果，因为不难验证在〔2〕所给的条件下，均有$\|A^+\|^{-1}=\gamma(A)$

最后一个定理，回答了〔2〕中所提出的问题·

定理5　设$A\in[X,\ Y]$可逆，那么$\rho(A,\ L)=\rho(A,L_1\cap L_2)=m(A)$．其中$L=\{B\in[X,\ Y]$：$B$不可逆$\}$．

证明　由于$M_0\cap N_0\subseteq L_2\cap L_2\subseteq L$，故$\rho(A,L)\leq\rho(A,L_1\cap L_2)\leq\rho(A,\ M_0\cap N_0)=m(A)$

另一方面，设$S\in[X,\ Y]$，$\|S\|<m(A)=\|A^{-1}\|^{-1}$，则$A+S=A(1+A^{-1}S)$可逆．故$\rho(A,L)\geq m(A)$．证毕．

参考文献

〔1〕翟必达，上海师范学院学报（自然科学版），No，2(1982) 1—8．

〔2〕杜鸿科，"数学研究与评论"，Vo16 (1986)，No．2，pp．159—160．

〔3〕Goldberg．S，Undounded Linear Operators Theory and Application，Mc．Graw—Hill，New Yo York，1966．

〔4〕Zemanek J，6—th International Conference on Operator Theory，Timisoara and Herculane (Romania)，June 1—11 (1981)．

〔5〕Pietsch．A，Operator Ideals，Berlin，1978．