一类非线性方程存在多个极限环的一个充分条件*

谭 寅

(哈尔滨科技大学)

一、引 言

设方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(y) - F(x) \\ -g(x) \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中记号

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \text{ 通用.} \tag{2}$$

关于方程（1）的极限环唯多性问题，不少人作了研究.〔1〕引进“n 重互相包含”曲线类，,经〔2〕的改进获得较好的结果，但这类曲线要求的条件较多. 本文不从〔1〕的观点出发，不包含〔1〕的全部条件，独立地用 Филиппов 变换折叠相平面，据轨线与折叠线交点的位置，对（1）的等价方程按线性方程积分，将积分的正负项作成比值进行比较，得出一组充分条件.

二、予 备 知 识

设方程（1）的右方满足：

$\varphi(y)$ 对 y 严格单增连续于 $(-\infty, +\infty)$ 并且 $\varphi(0)=0$. $\varphi(y)$ 的值域包含 $F(x)$ 的值域. （3）

$g(x), F(x)$ 对 x 连续于 $(-\infty, +\infty)$，$F(0)=0$ 并且满足条件保证（1）的解的唯一性. （4）

$$xg(x)>0,\ x\neq 0,\ \forall x\in(-\infty, +\infty) \text{ 并且} \int_0^{\pm\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty. \tag{5}$$

又设 Филиппов 变换为

$$z = \int_0^x g(x)\,\mathrm{d}x,\quad \forall x\in(-\infty,+\infty). \tag{6}$$

当 $0<x_1<+\infty$，$z(x)$ 的逆记为 $x_1=x_1(z)$，对 z 严格单增连续于 $(0,+\infty)$；当 $0>x_2>-\infty$，$z(x)$ 的逆记为 $x_2=x_2(z)$，对 z 严格单减连续于 $(0,+\infty)$. （7）

方程（1）经 Филиппов 变换变为

* 1984年9月18日收到.

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = g_i(z)\begin{pmatrix} \varphi(y) - F_i(z) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

其中 $g_i(z) = g(x_i(z))$，$i = 1, 2$，对 z 连续于 $(0, +\infty)$，$F_i(z) = F(x_i(z))$，$i = 1, 2$，对 z 连续于 $(0, +\infty)$． （9）

方程（8）在相平面 $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ 上的相方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -(\varphi(y) - F_i(z)), \quad i = 1, 2 \tag{10}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{-1}{\varphi(y) - F_i(z)}, \quad i = 1, 2 \tag{11}$$

引理1．若1．方程（1）满足条件（3），（4），（5），（6），（7），（8），（9）；2．$F_1(0) = F_2(0) = 0$；3．$\exists k_1, k_2$为实数，$M > 0$，当 $z > M$ 使 $F_1(z) > k_1$，（$F_2(z) < k_2$）；4．对任意小的 δ，$\exists z$ 使 $F_1(z) < 0$，（$F_2(z) > 0$），$0 < z < \delta$；5．$y\varphi(y) > 0$，$\forall y \in (-\infty, +\infty)$ 并且 $y \neq 0$．则在 $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ 的正（负）y 轴上的任一点 $\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$（$y_0 \neq 0$）的右邻域内，方程（8）有且只有一条轨线离开（趋近）$\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 点，经有限时间穿越 $\dot{z} = 0$ 的0迹线 $\varphi(y) - F(z) = 0$ 趋近（离开）负（正）y 轴上非0的某一点．并且在 $\dot{z} = 0$ 的0迹线的上方，方程（8）的任一条轨线保持：$y_1(t)$ 对 t 严格单减，$z_1(t)$ 严格单增（$y_2(t)$ 对 t 严格单增，$z_2(t)$ 严格单减）；在 $\dot{z} = 0$ 的0迹线下方，$y_1(t)$ 对 t 严格单减，$z_1(t)$ 严格单减．（$y_2(t)$ 对 t 严格单增，$z_2(t)$ 严格单增）．其中 $\begin{pmatrix} z_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix}$，$i = 1, 2$ 为方程（8）的轨线．

引理2．设1．方程（1）满足引理1的条件．2．在引理1(4)的条件下 $\exists \delta > 0$ 使 $F_2(z) > F_1(z)$，$\forall z \in (0, \delta)$．则在相平面 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 上，原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为不稳定的焦点．

引理3．设方程（1）满足引理2的条件，并且 $\exists 0 < \bar{z}^{(1)} < \bar{z}^{(2)} < \cdots < \bar{z}^{(n+1)}$ 使得 $(-1)^{j+1}[F_2(z) - F_1(z)] > 0$，$z \in (\bar{z}^{(j-1)}, \bar{z}^{(j)})$，其中 $\bar{z}^{(0)} = 0$，$j = 1, \cdots, n+1$．则

1．方程（11），$i = 1, 2$，经过点 $\begin{pmatrix} \bar{z}^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix}$ 的解分别为 $y_1(z)$，$y_2(z)$ 恒保持

$$y_2(z) - y_1(z) > 0, \quad \forall z \in [0, \bar{z}^{(1)});$$

2．方程（11），$i = 1, 2$ 分别经过 $\begin{pmatrix} \bar{z}^{(j)} \\ \bar{y}^{(j)} \end{pmatrix}$，$j = 1, \cdots, n+1$ 的满足相同 i 的方程的 $n+1$ 个解，彼此互不相交．

引理1—3 显然成立．证明从略．

引理4．若方程（1）满足引理3的条件，则

1．方程（11），$i = 1, 2$ 的经过 $\begin{pmatrix} \bar{z}^{(j)} \\ \bar{y}^{(j)} \end{pmatrix}$，$j = 1, \cdots, n+1$ 的解，满足

$$y_1(z) - y_2(z) = \psi_{\bar{z}^{(j)}, \bar{z}^{(j)}}(z)\int_{\bar{z}^{(j)}}^{z} \frac{(F_2(z) - F_1(z))\mathrm{d}z}{\psi_{\bar{z}^{(j)}, \bar{z}^{(j)}}(z)(\phi(y_1(z)) - F_1(z))(\phi(y_2(z)) - F_2(z))}, \tag{12}$$

其中

$$0<\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z)<\exp\left[\int_{\bar{z}^{(j)}}^{z}\frac{(\varphi(y_1(z))-\varphi(y_2(z)))/(y_1(z)-y_2(z))}{(\varphi(y_1(z)-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))}dz\right], \tag{13}$$

符号 $\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z)$ 的第一下标表示（13）右方积分的下限．第二下标表示经过 $\begin{pmatrix}\bar{z}^{(j)}\\ \bar{y}^{(j)}\end{pmatrix}$ ($j=1,\cdots,n+1$）的方程（11）的解 $y_1(z)$, $y_2(z)$，它具有性质：

$$\begin{aligned}&\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z)=\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(\bar{z}^{(j)})\cdot\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z),\\&(\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z))^{-1}=\psi_{z,\bar{z}^{(j)}}(\bar{z}^{(j)}),\ z\in[0,\ \bar{z}^{(j)}],\end{aligned}\quad j=1,\cdots,n+1. \tag{15}$$

2．$\exists\alpha_j,\beta_j$; $j=1,\cdots,n+1$，使得

$$(y_1(0)-y_2(0))=\alpha_j\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{+}dz+\beta_j\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{-}dz,\quad j=1,\cdots,n+1, \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}(F_2(z)-F_1(z))^{+}&=\begin{cases}F_2(z)-F_1(z), & \text{当 } F_2(z)-F_1(z)\geq 0,\\ 0 & \text{当 } F_2(z)-F_1(z)<0,\end{cases}\\(F_2(z)-F_1(z))^{-}&=\begin{cases}0 & \text{当 } F_2(z)-F_1(z)>0,\\ F_2(z)-F_1(z), & \text{当 } F_2(z)-F_1(z)\leq 0,\end{cases}\end{aligned} \tag{17}$$

$$\alpha_j=\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}\frac{(F_2(z)-F_1(z))^{+}dz}{\psi_{0,\bar{z}^{(j)}}(z)(\varphi(y_1(z))-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))}\Big/\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{+}dz, \tag{18}$$

$$\beta_j=\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}\frac{(F_2(z)-F_1(z))^{-}dz}{\psi_{0,\bar{z}^{(j)}}(z)(\varphi(y_1(z)-F_1(z))(\varphi(y_2(z)-F_2(z))}\Big/\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{-}dz,\quad j=1,\cdots,n+1. \tag{18}$$

证：据方程（11）得出

$$\frac{d(y_1-y_2)}{dz}=\frac{(\varphi(y_1(z))-\varphi(y_2(z))/(y_1(z)-y_2(z))}{(\varphi(y_1(z))-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))}(y_1-y_2)$$
$$+\frac{F_2(z)-F_1(z)}{(\varphi(y_1(z))-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))}.$$

据线性方程积分公式得出

$$y_1(z)-y_2(z)=\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z)\int_{\bar{z}^{(j)}}^{z}(\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z))^{-1}\frac{(F_2(z)-F_1(z))dz}{(\varphi(y_1(z))-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))}$$
$$j=1,\cdots,n+1,$$

其中 $\psi_{\bar{z}^{(j)},\bar{z}^{(j)}}(z)$，$j=1,\cdots,n+1$ 见（13）．

据积分可加性及指数 e 的性质得出（14），（15）．将（12）按（17）分解，再用（18）将（12）改写为（16）即得．

二、定　　理

定理Ⅰ．设1．方程（1）满足引理4的条件；

2．$$\int_{\bar{z}^{(j)}}^{0}(-1)^j[F_2(z)-F_1(z)]dz>0,\ j=1,\cdots,n+1; \tag{19}$$

3．$$(-1)^j\frac{\alpha_j}{\beta_j}<(-1)^j\lambda_j,\ j=1,\cdots,n+1, \tag{20}$$

其中 α_j, β_j 见（18），

$$\lambda_j=\left\{\int_{\bar z^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{-}\mathrm{d}z\Big/\left[-\int_{\bar z^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{+}\mathrm{d}z\right]\right\}\quad j=1,\cdots,n+1. \tag{21}$$

则：1．$(-1)^j(y_1(0)-y_2(0))>0,\ j=1,\cdots,n+1$； （22）

2．若（20）取等式则（22）取等式，反之亦成立；

3．方程（1）至少有 n 个闭轨．

证：将（16）两边乘以 $(-1)^j$ 运用 Th1 条件 3,2 得出

$$(-1)^j(y_1(0)-y_2(0))=\beta_j\left(-\int_{\bar z^{(j)}}^{0}(F_2(z)-F_1(z))^{+}\mathrm{d}z\right)\left[(-1)^{j+1}\frac{\alpha_j}{\beta_j}+(-1)^j\lambda_j\right],$$

则 $(-1)^j(y_1(0)-y_2(0))>0$．结论 1 成立．结论 2 显然成立，以下只证 3．

据定理1 条件2，$j=1$，$\int_{\bar z^{(j)}}^{0}-(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z>0$．据（4），引理3，$F_2(z)>F_1(z)$，$z\in(0,\bar z^{(1)})$，据引理 2 原点为不稳定的焦点．今把

$\varphi(y)-F_1(z)=0$ 的上方方程（11）$i=1$ 的解记为 $y_{1j}^{+}(z)$，

$\varphi(y)-F_1(z)=0$ 的下方方程（11）$i=1$ 的解记为 $y_{1j}^{-}(z)$，

$\varphi(y)-F_2(z)=0$ 的上方方程（11）$i=2$ 的解记为 $y_{2j}^{+}(z)$．

$\varphi(y)-F_2(z)=0$ 的下方方程（11）$i=2$ 的解记为 $y_{2j}^{-}(z)$．

据（6），将其原象在 $\binom{x}{y}$ 相平面上所对应的解分别记为

$$y_{ij}^{+}(x)=y_{ij}^{+}\left(\int_0^x g(x)\mathrm{d}x\right),\quad y_{ij}^{-}(x)=y_{ij}^{-}\left(\int_0^x g(x)\mathrm{d}x\right),\quad i=1,2,\ j=1,\cdots,n+1.$$

当 $j=1$，（参见图），上述轨线在 $\binom{x}{y}$ 相平面上组成境界线 L_1：$\widehat{a_1b_1c_1}\overline{c_1d_1}\widehat{d_1e_1f_1}\overline{f_1a_1}$．由于原点为不稳定的焦点，以下先证位于 L_1 包围的域 $(\bar L_1)$ 内的轨线性态：境界线在 $\binom{z}{y}$ 相平面上的映象在 $(0,\bar z^{(1)})$ 区间内满足引理2 条件 2，$F_2(z)>F_1(z)$．据引理2，$\widehat{a_1b_1c_1}$ 为无限反旋伸张螺线的弧段，因此 $(\bar L_1)$ 域内没有极限环并且该域内的轨线均从 $\overline{c_1d_1}$，$\overline{a_1f_1}$ 线段越出 $(\bar L_1)$ 的域外．

继续在 $(\bar L_1)$ 的域外作 $j=2$ 的境界线 L_2：$\widehat{a_2b_2c_2}\overline{c_2d_2}\widehat{d_2e_2f_2}\overline{f_2a_2}$，则方程（1）的相轨线均从 $\overline{c_2d_2}$，$\overline{f_2a_2}$，$\overline{c_1d_1}$，$\overline{a_1f_1}$ 进入由 L_2，L_1 包围的环域内，据 Poincare-Bendixson 定理，其内存在极限环．继续上述作法，作 j 的境界线

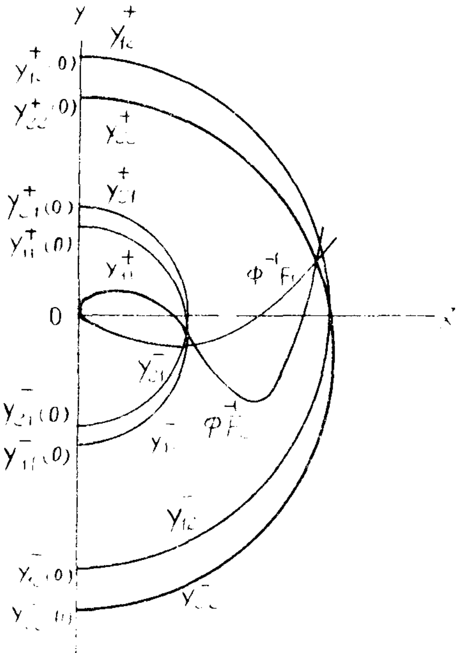
L_j：$\widehat{a_jb_jc_j}\overline{c_jd_j}\widehat{d_je_jf_j}\overline{f_ja_j}$，$L_{j+1}$：$\widehat{a_{j+1}b_{j+1}c_{j+1}}\overline{c_{j+1}d_{j+1}}\widehat{d_{j+1}e_{j+1}f_{j+1}}\overline{f_{j+1}a_{j+1}}$

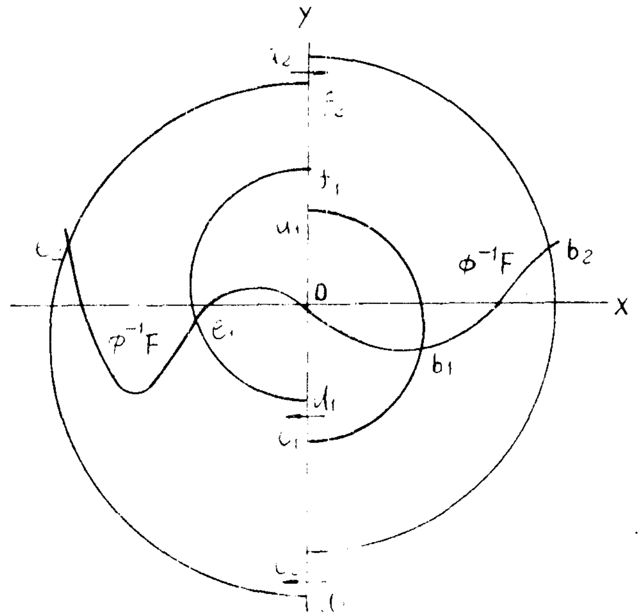
则由 L_j, L_{j+1} 包围的环域内，方程(1)的相轨线从奇数 j 的线段 $\overline{c_{j+1}d_{j+1}}$，$\overline{f_{j+1}a_{j+1}}$，$\overline{c_jd_j}$，$\overline{f_ja_j}$ 进入由 L_j，L_{j+1} 包围的环域内，从偶数 j 的线段 $\overline{c_{j+1}d_{j+1}}$，$\overline{f_{j+1}a_{j+1}}$，$\overline{c_jd_j}$，$\overline{f_ja_j}$ 走出由 L_j，L_{j+1} 包围的环域，据 Poincare Bendixson 定理。方程（1）在每一个环域内至少存在一个极限环．$j=1,\cdots,n$，从而总计至少存在 n 个闭轨、定理1 成立．

注：若能找到一组严格单增正数列 $\{\gamma_{jk}\}_{k=1}^{k=j}$，$j=1,\cdots,n+1$．使得

$$\frac{\alpha_j}{\beta_j}=\lambda_j\sum_{k=1}^{\left[\frac{j+1}{2}\right]}\gamma_{j,2k-1}\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_{j,2k},\quad j=1,\cdots,n+1 \tag{23}$$

其中 α_j、β_j 见（18），$j=1,\cdots,n+1$，则定理1 条件 3 必成立．这是因为当 j 为偶数时，





$\left[\frac{j+1}{2}\right]=\left[\frac{j}{2}\right]$，（23）右方分子、分母的项数相等 [illegible] 应项正严格单增：

$$\frac{\nu_{j,2k-1}}{\nu_{j,2k}}<1,\ k=1,\cdots,\left[\frac{j+1}{2}\right]. \quad \cdots$$

得出 $\frac{a_j}{\beta_j}=\lambda_j\sum_{k=1}^{\left[\frac{j+1}{2}\right]}\nu_{j,2k-1}\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k}<1\cdot\lambda_j$，$j=1,\cdots,n+1$，则 j 为偶数，[illegible]

$(-1)^j\lambda_j$．当 j 为奇数时则 $\left[\frac{j+1}{2}\right]=\left[\frac{j}{2}\right]+1$，（23）右方的分子 [illegible] 项，

$$\left(a_1+\sum_{k=2}^{\left[\frac{j+1}{2}\right]}\nu_{j,2k+1}\right)\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k}=\left(a_1+\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k+1}\right)\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k}.$$

其中分子、分母的∑式中对应项正严格单增：$\frac{\nu_{j,2k+1}}{\nu_{j,2k}}>1$，从而

$$\frac{a_j}{\beta_j}=\lambda_j\left(a_1+\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k+1}\right)\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k}>\lambda_j\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k+1}\Big/\sum_{k=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\nu_{j,2k}>\lambda_j,$$

则 j 为奇数，$(-1)^j\frac{a_j}{\beta_j}<(-1)^j\lambda_j$．因此无论 j 为奇或偶，定理1 条件3 必成立．

定理2　设方程（1）满足下列各条件：

1．$\varphi(y)$ 对 y 严格单增连续于 $(-\infty,+\infty)$ 并且 $\varphi(o)=0$．$\varphi(y)$ 的值域包含 $F(x)$ 的值域．

2．$g(x)$ 对 x 连续于 $(-\infty,+\infty)$ 并且保证解对初始条件的唯一性．

3．$xg(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$x\neq0$，$\int_0^{\pm\infty}g(x)\,dx=+\infty$．

4. $F(x)$ 对 x 连续于 $(-\infty, +\infty)$, $F(0)=0$ 并且保证解对初始条件的唯一性.

5. $\exists M>0$ 及实数 k_1, k_2, 当 $z>M$ 使得 $F_1(z)>k_1$, $F_2(z)<k_2$.

6. 下列条件之一成立:

6.1. 对 $\forall \delta>0$, $\exists z, z' \in (0, \delta)$ 使得 $F_1(z)<0$, $F_2(z)>0$.

6.2. 原点 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 在相平面 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 上为方程 (1) 的不稳定焦点.

7. $\exists 0=\bar{z}^{(0)}<\bar{z}^{(1)}<\cdots<\bar{z}^{(n+2)}$ 使得

$$(-1)^{j+1}[F_2(z)-F_1(z)]>0,\ z\in(\bar{z}^{(j-1)}, \bar{z}^{(j)}),\ j=1,\cdots,n+2.$$

8. $\sup\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_1$ 对于偶数的 k 严格上升,

$\inf\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_1$ 对于奇数的 k 严格下降,

$\sup\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_2$ 对于奇数的 k 严格上升,

$\inf\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]}$ 对于偶数的 k 严格下降, $k=1,\cdots,n+2$. (24)

9. k 为奇数时 $\inf\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_1 \le \sup\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_1 \le \inf\limits_{[\bar{z}^{(k)},\bar{z}^{(k+1)}]} F_1 \le \sup\limits_{[\bar{z}^{(k)},\bar{z}^{(k+1)}]} F_1$,

(25)

k 为偶数时 $\inf\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_2 \le \sup\limits_{[\bar{z}^{(k-1)},\bar{z}^{(k)}]} F_2 \le \inf\limits_{[\bar{z}^{(k)},\bar{z}^{(k+1)}]} F_2 \le \sup\limits_{[\bar{z}^{(k)},\bar{z}^{(k+1)}]} F_2$,

$k=1,\cdots,n+2$.

10. $-\int_{\bar{z}^{(k)}}^{\bar{z}^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z$. 对于 k 不下降, $k=1,\cdots,n+2$. (26)

11. 对于给定的 j:

当 j 为奇数, k 为奇数时 $(1\le k\le j-2,\ j=3,\cdots,n+2)$

$$\max\left\{\left(1+\frac{F_1(z)-F_1(z')}{\inf\limits_{[\bar{z}^{(j-1)},\bar{z}^{(j)}]}F_1-F_1(z)}\right),\ \left(1+\frac{F_2(z)-F_2(z')}{\sup\limits_{[\bar{z}^{(j-1)},\bar{z}^{(j)}]}F_2-F_2(z)}\right)\right\}$$
$$\le\frac{-\int_{\bar{z}^{(k+1)}}^{\bar{z}^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar{z}^{(k)}}^{\bar{z}^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z},$$

当 j 为偶数, k 为奇数时 $(1\le k<j-2,\ j=3,\cdots,n+2)$

$$\max\left\{\left(1+\frac{F_1(z)-F_1(z')}{\inf\limits_{[\bar{z}^{(j-2)},\bar{z}^{(j-1)}]}F_1-F_1(z)}\right),\ \left(1+\frac{F_2(z)-F_2(z')}{\sup\limits_{[\bar{z}^{(j-2)},\bar{z}^{(j-1)}]}F_2-F_2(z)}\right)\right\}$$
$$\le\frac{-\int_{\bar{z}^{(k+1)}}^{\bar{z}^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar{z}^{(k)}}^{\bar{z}^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}$$

当 j 为奇数, k 为偶数时 $(2\le k<j-2,\ j=3,\cdots,n+2)$

$$\max\left\{\left(1+\frac{F_2(z)-F_2(z')}{\inf\limits_{[\bar z^{(j-2)},\bar z^{(j-1)}]} F_2-F_2(z)}\right),\ \left(1+\frac{F_1(z)-F_1(z')}{\sup\limits_{[\bar z^{(j-2)},\bar z^{(j-1)}]} F_1-F_1(z)}\right)\right\}$$

$$\leq\frac{-\int_{\bar z^{(k+1)}}^{\bar z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar z^{(k)}}^{\bar z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z},$$

当 j 为偶数，k 为偶数时（$2\leq k\leq j-2,\ j=3,\cdots,n+2$）

$$\max\left\{\left(1+\frac{F_2(z)-F_2(z')}{\inf\limits_{[\bar z^{(j-1)},\bar z^{(j)}]} F_2-F_2(z)}\right),\ \left(1+\frac{F_1(z)-F_1(z')}{\sup\limits_{[\bar z^{(j-1)},\bar z^{(j)}]} F_1-F_1(z)}\right)\right\}$$

$$\leq\frac{-\int_{\bar z^{(k+1)}}^{\bar z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar z^{(k)}}^{\bar z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z},$$

其中 $z\in(\bar z^{(k-1)},\bar z^{(k)})$，$z'\in(\bar z^{(k)},\bar z^{(k+1)})$. $\qquad(27)_k$

结论是方程（1）至少有 n 个闭轨.

证明：将方程（11）经过点 $\binom{\bar z^{(j)}}{y^{(j)}}$ 的解 $y_1(z)$，$y_2(z)$ 代入下列积分

$$-\int_{\bar z^{(k)}}^{\bar z^{(k-1)}}\frac{(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{\psi_{0,\bar z^{(j)}}(z)(\varphi(y_1(z))-F_1(z))(\varphi(y_2(z))-F_2(z))},$$

$$k=1,\cdots,j-2,\ j=3,\cdots,n+2.\qquad(28)_k$$

以下证 $(28)_k$ 对 k 为正严格单增满足（23）必满足定理1 条件3 据定理1 得出结论.

据中值公式先将 $(28)_k/(28)_{k+1}$ 表成为

$$\frac{(28)_k}{(28)_{k+1}}=\frac{\psi_{0,\bar z^{(j)}}(\eta)(\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta))(\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta))}{\psi_{0,\bar z^{(j)}}(\xi)(\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi))(\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi))}\cdot$$

$$\cdot\frac{-\int_{\bar z^{(k)}}^{\bar z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar z^{(k+1)}}^{\bar z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z},$$

5 其中中值 $\xi\in(\bar z^{(k-1)},\bar z^{(k)})$，$\eta\in(\bar z^{(k)},\bar z^{(k+1)})$.

据 $\psi_{0,\bar z^{(j)}}(z)$ 对于 z 为正严格单减得出：

$$\frac{(28)_k}{(28)_{k+1}}<\left(\frac{\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta)}{\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi)}\right)\cdot\left(\frac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{-\int_{\bar z^{(k)}}^{\bar z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{\bar z^{(k+1)}}^{\bar z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}.\qquad(29)$$

当方程（11）经过点 $\binom{\bar z^{(j)}}{y^{(j)}}$ 的解 $y_1(z)$，$y_2(z)$ 位于0迹线 $\varphi(y)-F_i(z)=0$，$i=1,2$

的上方的情形.

若 j 为奇数，k 为奇数，$1\leq k\leq j-2$, $j=3,\cdots,n+2$, 据引理1, 定理2 条件 1, $\varphi(y_i(z))$ 对 z 严格单减 $i=1,2$, 得出

$$\varphi(y_1(\xi))>\varphi(y_1(\eta))>F_1(\eta)\geq\inf_{[\bar z^{(k)},\bar z^{(k+1)}]}F_1.$$

据（25）， $\inf\limits_{[\bar z^{(k)},\bar z^{(k+1)}]}F_1\geq\sup\limits_{[\bar z^{(k-1)},\bar z^{(k)}]}F_1$，从而

$$\frac{\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta)}{\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi)}<1. \tag{30}$$

同理 $\varphi(y_2(\xi))>\varphi(y_2(\eta))>\varphi(y_2(\bar z^{(j-1)}))>\sup\limits_{[z^{(j-1)},\bar z^{(j)}]}F_2$

则 $$\frac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}\leq\frac{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}=1+\frac{F_2(\xi)-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}$$

$$\leq1+\frac{F_2(\xi)-F_2(\eta)}{\sup\limits_{[z^{(j-1)},z^{(j)}]}F_2-F_2(\xi)}.$$

据（27），得出

$$\frac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}\leq\frac{-\int_{z^{(k+1)}}^{z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}. \tag{31}$$

将（30),（31）代入（29）得出 $\dfrac{(28)_k}{(28)_{k+1}}\leq1.$

若 j 为奇数，k 为偶数，$2\leq k<j-2$, $j=3,\cdots,n+2$, 同理

$\varphi(y_2(\xi))>\varphi(y_2(\eta))>F_2(\eta)\geq\inf\limits_{[z^{(k)},\bar z^{(k+1)}]}F_2\geq\sup\limits_{[\bar z^{(k-1)},\bar z^{(k)}]}F_2\geq F_2(\xi)$,

得出 $\dfrac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}<1$. 又 $\varphi(y_1(\xi))>\varphi(y_1(\eta))>\varphi(y_1(\bar z^{(j-2)}))>\mathop{\mathrm{SUP}}\limits_{[z^{(j-2)}\bar z^{(j-1)}]}F_1$,

则 $$\frac{\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta)}{\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi)}<1+\frac{F_1(\xi)-F_1(\eta)}{\sup\limits_{[\bar z^{(j-2)},\bar z^{(j-1)}]}F_1-F_1(\xi)}$$

$$\leq\frac{-\int_{z^{(k+1)}}^{z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}.$$

据（29）得出 $\dfrac{(28)_k}{(28)_{k+1}}<1.$

若 j 为偶数，k 为奇数，$1\leq k<j-2$, $j=3,\cdots,n+3$, 同理有 $\dfrac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}<1$,

$$\frac{\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta)}{\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi)}<1+\frac{F_1(\xi)-F_1(\eta)}{\sup\limits_{[\bar z^{(j-2)},\bar z^{(j-1)}]}F_1-F_1(\xi)}$$

$$\leq \frac{-\int_{z^{(k+1)}}^{z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}.$$

代入（29），得出 $\frac{(28)_k}{(28)_{k+1}}<1$

若j为偶数，k为偶数，$2\leq k\leq j-2$, $j=3,\cdots,n+2$, 同理有 $\frac{\varphi(y_2(\eta))-F_2(\eta)}{\varphi(y_2(\xi))-F_2(\xi)}<1$,

$$\frac{\varphi(y_1(\eta))-F_1(\eta)}{\varphi(y_1(\xi))-F_1(\xi)}<1+\frac{F_1(\xi)-F_1(\eta)}{\sup\limits_{[z^{(j-1)},z^{(j)}]}F_1-F_1(\xi)}\leq$$

$$\leq \frac{-\int_{z^{(k+1)}}^{z^{(k)}}(-1)^{(k+1)+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}{-\int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}}(-1)^{k+1}(F_2(z)-F_1(z))\mathrm{d}z}.$$

代入（29），得出$\frac{(28)_k}{(28)_{k+1}}<1$, 则当解位于0迹线的上方时，$(28)_k$对于$k$为正严格单增成立.

当解位于0迹线的下方时，（29）仍成立，并且

$-\varphi(y_i(z))-(-F_i(z))>0$, $\sup(-F_i)=-\inf F_i$, $i=1,2$.

同理类证：据$(27)_k$得出$\frac{(28)_k}{(28)_{k+1}}<1$, 则积分$(28)_k$对于$k$仍为正严格单增. 方程（1）至少存在$n$个闭轨，定理2成立.

注：对于不满足定理2条件11的情形，例如若1. 方程（1）满足定理2的条件1,2,3,4,5,6,7；

2. $\bar{z}^j=jl$, $j=0,1,\cdots,n+2$；

3. $F_1(z)=-F_2(z)$, $z\in(0,l)$；

4. $F_1(z+l)=-F_1(z)$, $z\in(0,(n+2)l)$；

5. $-\varphi(y)=\varphi(-y)$, $y\in(-\infty,+\infty)$.

则积分$(28)_k$对于k仍为正严格单增，方程（1）至少存在n个闭轨，也可以用本文证明的方法得出. 由于这一结果已知，证明从略.

参 考 文 献

〔1〕 Р. С. Рычков Сибир Матем. Журная Т. 7, No. 6 (1966), 1125—1131.

〔2〕 张芷芬，北京大学学报，自然科学版，1, 1982.