B(m→m)中的等距逼近问题*

[illegible]

（南开大学）

本文利用B(m→m)的算子表示定理和ba(N)[2]中元的性质，解决了B(m→m)中的"等距与几乎等距算子的关系"[1]问题，即得到如下结果：设 $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$，则对B(m→m)中任意"ε—等距算子"[1] T，必存在B(m→m)中的等距算子 U，使 $\|T-U\|\le 4\varepsilon$.

定义1 记号m表示（复）有界数列空间，记号m_0表示N上复值"简单函数"空间，即m_0中元写成 $x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e[A_j]$，$\forall \xi_j\in C$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$\forall i\neq j$，$e[A_j]$是$A_j(\subset N)$上的特征函数．显然$m_0\subset m$．

引理1 m_0稠于m．（证明见[2] P[illegible]）．

定义2 2^N表示自然数集N的幂集合，ba(N)表示2^N上有界可加（集）函数组成的赋范空间[2]．ba(N)中元记为μ,ν,μ_i……等，范数为 $\|\mu\|=\sup_P\sum_{j=1}^{n}|\mu(A_j)|$，$P=\{A_j\}_{j=1}^{n}$为N的分划

直接从定义出发不难得到如下结论：

性质1 定义 $\mu^{(i)}(A)=\begin{cases}1, & \text{当 } i\in A \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i\notin A \text{ 时},\end{cases}$ $\forall A\in 2^N$，$(i\in N)$，则 $\mu^{(i)}\in$ ba(N)，且 $\|\mu^{(i)}\|=1$．

性质2 设 $\mu\in$ ba(N)，则对任意不相交集族 $\{A_j\}_{j=1}^{\omega}\subset 2^N$（ω有限或+∞），有

$$\sum_{j=1}^{\omega}|\mu(A_j)|\le\|\mu\|.$$

性质3 设 $\nu\in$ ba(N)，$i\in N$，$\mu^{(i)}$同性质1，则 $\|\nu-\nu\{i\}\mu^{(i)}\|=\|\nu\|-|\nu\{i\}|$．

性质4 设 $\mu\in$ ba(N)，令 $f_\mu(x)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mu(A_j)$，$\forall x=\sum_{j=1}^{n}\xi_j e[A_j]\in m_0$，则 $f_\mu\in m_0^*$ 且 $\|f_\mu\|=\|\mu\|$．

注 因为由引理1，f_μ可唯一地保范延拓到m上（仍记为f_μ），所以$f_\mu\in m^*$．

性质5 设 $f\in m^*(m_0^*)$，定义2^N上函数μ_f，$\mu_f(A)=f(e[A])$，$\forall A\in 2^N$，则 $\mu_f\in$ ba(N)，$f_{\mu_f}=f$，且 $\|\mu_f\|=\|f\|$．

利用性质4和5马上可以得到下面的引理2．

---

* 1984年6月13日收到．

引理 2 在对应 $f\to\mu_f$ 下，m^* 等价于 $ba(\mathbb{N})$[2]。

引理 3 算子 $T\in B(m\to m)\Leftrightarrow T=(f_1,f_2,\cdots\cdots)$，$f_j\in m^*$，$\forall j$，并且 $\|T\|=\sup\limits_j\|f_j\|<+\infty$（其中 $T=(f_1,f_2,\cdots)$ 是指 $Tx=(f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots)$，$\forall x\in m$）

证明 在[3]的定理4.51—A和B中令 $X=Y=m$、$Z=\mathbb{C}$ 及 $S=\mathbb{N}$ 即可。

定理 1 算子 $T\in B(m\to m)\Leftrightarrow T=(\mu_1,\mu_2,\mu_3\cdots)$ $\forall\mu_j\in ba(\mathbb{N})$，且 $\|T\|=\sup\limits_j\|\mu_j\|<+\infty$（其中 $T=(\mu_1,\mu_2,\cdots)$ 是指 $Tx=(f_{\mu_1}(x),f_{\mu_2}(x),f_{\mu_3}(x),\cdots)$。

证明 由性质 4 和 5 及引理 2 和 3 显然。

定理 2 设 $U=(\mu_1,\mu_2,\cdots)\in B(m\to m)$，$\mu_j\in ba(\mathbb{N})$ $\forall j\in\mathbb{N}$，则 U 是等距算子当且仅当 U 满足：

（1）$\sup\limits_j\|\mu_j\|\leqslant 1$；（2）$\sup\limits_j|\mu_j\{i\}|\geqslant 1$，$\forall i\in\mathbb{N}$。

证明 "仅当"部分由 $\|U\|=1$ 及 $\|Ue_i\|=1$ 是显然的，其中 $e_i=(00\cdots0100\cdots)\in m$，$\forall i\in\mathbb{N}$。

下证"当"部分。由（1）及定理 1 得 $\|U\|\leqslant 1$，因此要证 U 等距只需再证 $\|Ux\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in m$，而由引理 1 这只要证 $\|Ux\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in m_0$ 即可。

设 $x\in m_0$，不妨设 $x\neq 0$，$x=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_je[A_j]$，且 $A_1=\{i_0\}$，$i_0\in\mathbb{N}$ 及 $|\xi_1|=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\xi_j|$。由条件（2），对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}$，使 $|\mu_{j_\varepsilon}\{i_0\}|>1-\varepsilon$。因此

$$\begin{aligned}\|Ux\|&=\sup_j\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_j(A_k)\right|\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_{j_\varepsilon}(A_k)\right|\\&=\left|\xi_1\mu_{j_\varepsilon}(A_1)+\sum_{k=2}^{n}\xi_k(\mu_{j_\varepsilon}-\mu_{j_\varepsilon}\{i_0\}\mu^{(i_0)})(A_k)\right|\\&\geqslant|\xi_1|\,|\mu_{j_\varepsilon}\{i_0\}|-\max_{2\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|\cdot\|\mu_{j_\varepsilon}-\mu_{j_\varepsilon}\{i_0\}\mu^{(i_0)}\|\\&\geqslant\|x\|(1-\varepsilon)-\|x\|[1-(1-\varepsilon)]=\|x\|(1-2\varepsilon)\end{aligned}$$

（其中 $\mu^{(i_0)}$ 同性质 1），令 $\varepsilon\to 0$ 得 $\|Ux\|\geqslant\|x\|$，$\forall x\in m_0$。

定理 3 设 $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{3}$，$T$ 为 $B(m\to m)$ 中的 ε-等距算子，则对 $\forall$ $0<\sigma<1-3\varepsilon$，存在 $B(m\to m)$ 中的等距算子 U_σ，使 $\|T-U_\sigma\|\leqslant 3\varepsilon+\sigma$。

证明 根据定理 1，可设 $T=(\mu_1,\mu_2,\cdots)$ $\mu_j\in ba(\mathbb{N})$，$\forall j\in\mathbb{N}$，则 $\|T\|=\sup\limits_j\|\mu_j\|\leqslant 1+\varepsilon$。设 $0<\sigma<1-3\varepsilon$，$\forall i\in\mathbb{N}$，$\|e_i\|=1$，$\|Te_i\|=\sup\limits_j|\mu_j\{i\}|\geqslant 1-\varepsilon$。所以存在 $j^{(i)}\in\mathbb{N}$，使 $|\mu_{j(i)}\{i\}|>1-\varepsilon-\frac{\sigma}{2}$。记 $B=\{j^{(i)}\mid i=1,2,3,\cdots\}\subseteq\mathbb{N}$，若 $i\neq k$ 则 $j^{(i)}\neq j^{(k)}$。因为，否则由性质 2 有 $\|\mu_{j(i)}\|\geqslant|\mu_{j(i)}\{i\}|+|\mu_{j(i)}\{k\}|>2(1-\varepsilon-\frac{\sigma}{2})>1+\varepsilon$ 矛盾。

下面构造满足定理的等距算子 $U_\sigma=(\nu_1,\nu_2,\cdots\cdots)$：1° 当 $j\notin B$ 且 $\|\mu_j\|\leqslant 1$ 时，令 $\nu_j=\mu_j$；2° 当 $j\notin B$ 且 $\|\mu_j\|>1$ 时，令 $\nu_j=\frac{\mu_j}{\|\mu_j\|}$；3° 当 $j\in B$ 时，令 $\nu_j=\frac{\mu_j\{i\}}{|\mu_j\{i\}|}\mu^{(i)}$，其中 $i\in\mathbb{N}$，满足 $j=j(i)$，$\mu^{(i)}$ 同性质 1。

由 U_σ 的作法，有 $\nu_j\in ba(\mathbb{N})$，$\|\nu_j\|\leqslant 1$ $\forall j\in\mathbb{N}$，所以（i）$\sup\limits_j\|\nu_j\|\leqslant 1$。而且 $\forall i\in\mathbb{N}$，$|\nu_{j(i)}\{i\}|=1$；（ii）$\sup\limits_j|\nu_j\{i\}|\geqslant 1$。由定理 1 和 2 知 U_σ 是 $B(m\to m)$ 中的等距算子。

最后证明 $\|T-U_\sigma\|\leqslant 3\varepsilon+\sigma$：当 $j\notin$ B时由1°和2°得 $\|\mu_j-\nu_j\|\leqslant\varepsilon$；当 $j\in$ B时由3°和性质3有：设 $j=j(i)$， $i\in\mathbf{N}$

$$\|\mu_j-\nu_j\|=\|\mu_j-\mu_j\{i\}\mu^{(i)}+\mu_j\{i\}\mu^{(i)}-\frac{\mu_j\{i\}}{|\mu_j\{i\}|}\mu^{(i)}\|$$

$$\leqslant\|\mu_j-\mu_j\{i\}\mu^{(i)}\|+|1-|\mu_j\{i\}||\cdot\|\mu^{(i)}\|$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)-(1-\varepsilon-\frac{\sigma}{2})+(\varepsilon+\frac{\sigma}{2})=3\varepsilon+\sigma$$

因此 $\|T-U_\sigma\|=\sup\limits_j\|\mu_j-\nu_j\|\leqslant 3\varepsilon+\sigma$.

推论1 设 $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{3}$，$T$ 为B（$c_0\to m$）或B（$c\to m$）的 ε－等距算子，则对 $\forall$ $0<\sigma\leqslant 1-3\varepsilon$，必存在B（$c_0\to m$）或B（$c\to m$）的等距算子 U_σ，使 $\|T-U_\sigma\|_1\leqslant 3\varepsilon+\sigma$，(其中 $\|\cdot\|_1$ 是B（$c_0\to m$）或B（$c\to m$）的范数).

证明 设 $Tx=(f_1(x),f_2(x),\cdots)$，$\forall$ $x\in c_0$或 c 则 $f_j\in(c_0)^*$ 或（c）*，$\forall j\in\mathbf{N}$，并且 $\|T\|=\sup\limits_j\|f_j\|\leqslant 1+\varepsilon$，根据Hahn Banach定理，$\forall j,f_j$ 可保范延拓到m上. 延拓后的泛函仍记为 f_j，由引理3，$T=(f_1,f_2,\cdots)\in$ B（$m\to m$），再由定理1，可设 $T=(\mu_1,\mu_2,\cdots)$，$\forall\mu_j\in ba(\mathbf{N})$ 并且 $\|T\|=\sup\limits_j\|\mu_j\|\leqslant 1+\varepsilon$，设 $0<\sigma\leqslant 1-3\varepsilon$，由于 $e_i\in c_0$ 或 c 对 $\forall_i\in\mathbf{N}$，$\|Te_i\|=\sup\limits_j|\mu_j\{i\}|\geqslant 1-\varepsilon$，所以存在 $j\{i\}\in\mathbf{N}$，使 $|\mu_{j(i)}\{i\}|>1-\varepsilon-\frac{\sigma}{2}$. 记 $B=\{j\{i\}|i=1,2,3,\cdots\}\subseteq\mathbf{N}$，设 U_σ 同定理3证明中构造的 U_σ，则 U_σ 是B（$m\to m$）中的等距算子，从而也是B（$c_0\to m$）或B（$c\to m$）中的等距算子，且 $\|T-U_\sigma\|_2\leqslant 3\varepsilon+\sigma$，$\|\cdot\|_2$ 为B（$m\to m$）的范数. 由于 $c_0\subseteq m$ 及 $c\subseteq m$，以以 $\|T-U_\sigma\|_1\leqslant 3\varepsilon+\sigma$，其中 $\|\cdot\|_1$ 为B（$c_0\to m$）或B（$c\to m$）的范数.

推论2 设 $0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{3}$，则对任意B（$m\to m$）中的 ε－等距算子 T，必存在B（$m\to m$）中的等距算子 U，使 $\|T-U\|\leqslant 4\varepsilon$.

证明 在定理3中取 $\sigma=\min\{1-3\varepsilon,\varepsilon\}$，再取 $U=U_\sigma$ 即可。

注1 对于推论1也有类似于推论2的结论。

注2 定理3中的m换成 m（Γ）结论仍成立。其中Γ可为任一点集，m（Γ）表示Γ上有界函数空间.

参 考 文 献

[1] 定光桂，“等距与几乎等距算子”，数学物理学报 Vol. 3 (1983) No. 4.

[2] W. H. Ruckle, Sequence Spaces, 1981,

[3] A. E. Taylor, Introduction to Functional Analysis, 1958.