关于Lagrange插值平均收敛的注记*

孙燮华
(杭州大学)

1　设$w(x)$是区间〔-1, 1〕上的权函数，$\{\Phi_n(x)\}$是相应的正交多项式序列，用

$$X:\ -1<x_{n,n}<x_{n-1,n}<\cdots<x_{1,n}<1 \tag{1.1}$$

表示$\Phi_n(x)$的零点，而$L_n(f, x)$表示基于节点系（1.1）的Lagrange插值多项式．记$x_{i,n}=\cos\theta_{i,n}$．$N_n(\alpha, \beta)$表示在区间〔α, β〕中$\theta_{i,n}$的个数．

最近，Bellen, A[1]考虑了下述问题：

设$m(n)=an+b$，a, b是整数且$a>0$，寻找一个附加节点系：

$$Y:\ -1\le y_{m(n),n}<y_{m(n)-1,n}<\cdots<y_{1,n}\le 1,\ x_{i,n}\ne y_{j,n},\ \forall\, i,j,n \tag{1.2}$$

使得对于新节点系

$$X\cup Y:\ x_{1,n},\cdots,x_{n,n},\ y_{1,n},\cdots,y_{m(n),n},\ n=1,2,\cdots \tag{1.3}$$

相应的Lagrange插值多项式$L_{n+m(n)}(f, x)$对定义于〔-1, 1〕上的某个函数类成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} w(x)\{L_{n+m(n)}(f, x)-f(x)\}^2 dx=0. \tag{1.4}$$

Bellen, A的结果是下述的

定理A　设节点系（1.1）满足条件

$$(\underline{E})\quad \begin{cases} \text{若 } n(\beta_n-\alpha_n)\to\infty\ (n\to\infty),\quad 0\le\alpha_n<\beta_n\le\pi,\ \text{则} \\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{N_n(\alpha_n, \beta_n)}{(\beta_n-\alpha_n)}\le\dfrac{1}{\pi}\ \text{且}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n(\theta_{i+1,n}-\theta_{i,n})>0,\ \forall\, i, \end{cases}$$

又设附加节点系（1.2）是严格规范的，若

$$\lim_{n\to\infty} nE_n^2(f)\cdot M(n)=0, \tag{1.5}$$

则（1.4）成立，此处，$E_n(f)$表示f在〔-1, 1〕上的最佳一致逼近，而

$$M(n)=\frac{\int_{-1}^{1} W(x)\Phi_n^2(x)dx}{\min_i \Phi^2(y_{i,n})}.$$

本注记的目的是改进定理A．我们省略了对节点系（1.2）要求“严格规范”的条件并减弱了条件（1.5），从而扩大了满足（1.4）的函数类．

2　记

$$\Psi_m(x)=\prod_{i=1}^{m(n)}(x-y_{i,n}),\quad l_i(x)=\frac{\Psi_m(x)}{\Psi_m'(y_{i,n})(x-y_{i,n})},\quad i=1,\cdots,m(n),$$

* 1984年6月28日收到．本文为中国科学院科学基金会资助的课题．

$$L_n=\sup_{-1\leq x\leq 1}\sum_{k=1}^{m(n)}\frac{|l_k(x)|}{|\Phi_n(y_{kn})|},\quad \|f\|=\left(\int_{-1}^{1}w(x)f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}。$$

我们的结果如下：

定理 若节点系（1.1）满足条件（E），若附加节点系（1.2）及函数$f(x)$满足

$$\lim_{n\to\infty}L_n\cdot E_n(f)\|\Phi_n\|=0,\tag{2.1}$$

则（ ）成立。

证明 利用[1]的下式，（有关记号同文［1］）

$$\ldots(f-p_n,x)=\sum_{i=1}^{m(n)}\frac{\Phi_n(x)l_i(x)}{\Phi_n(y_{in})}$$

直接估计获得。

现在，将定理应用于Jacobi多项式$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$（简记$P_n^{(\alpha)}(x)=P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$，$\alpha>-1$）。比较……，我们将会看到估计$L_n$并不比计算$\min|\Phi_n(y_{in})|$复什，但由此获得的结果却有较大的……。考虑下述三种情形：

(a) $\Phi_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$，$\Psi_m(x)=(1-x^2)P_n^{'(\alpha)}(x)$；

(b) $\Phi_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$，$\Psi_m(x)=P_n^{'(\alpha)}(x)$，

(c) $\Phi_n(x)=(1-x^2)P_n^{'(\alpha)}(x)$，$\Psi_m(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$。

为证下面的引理，我们需要一些已知的结果．记ζ_k，ξ_k分别是$P_n^{'(\alpha)}(x)$、$P_n^{(\alpha)}(x)$的零点，……$\cos\varphi_k$，$\xi_k=\cos\theta_k$。则

$$|P_n^{(\alpha)}(\zeta_k)|\sim k^{-\alpha-3/2}n^{\alpha+2},\ k=1,\cdots,[n/2],\tag{3.1}$$

$$|P_n^{'(\alpha)}(\xi_k)|\sim(n+1-k)^{-\alpha-3/2}n^{\alpha+2},\ k=[n/2]+1,\cdots,n;\quad [2,(8.9.2)]\tag{3.2}$$

$$\sin\varphi_k\sim\sin\theta_k\sim\frac{k}{n},\ k=1,\cdots,[n/2],\tag{3.3}$$

$$\sin\varphi_k\sim\sin\theta_k\sim\frac{n+1-k}{n},\ k=[n/2]+1,\cdots,n-1\text{或}n。[2,(8.9.1)]\tag{3.4}$$

$$P_n^{(\alpha)}(x)=O(n^{-1/2}),(\alpha<-\frac{1}{2}),\ P_n^{(\alpha)}(x)=O(n^{\alpha})(\alpha\geq-\frac{1}{2})。[2,(7.32.2)]\tag{3.5}$$

$$|P_n^{(\alpha)}(1)|\sim n^{\alpha},\quad [2,(4.1.1)]\tag{3.6}$$

$$|(\sin\theta)^{\alpha+1/2}P_n^{(\alpha)}(\cos\theta)|=O(n^{-1/2}),\ (\alpha\geq-\frac{1}{2})\quad(\text{见}[3,\ p.297-298])\tag{3.7}$$

$$|P_n^{(\alpha)}(\zeta_k)|\sim k^{-\alpha-1/2}n^{\alpha},\ k=1,\cdots,[(n-1)/2],\tag{3.8}$$

$$|P_n^{(\alpha)}(\zeta_k)|\sim(n+1-k)^{-\alpha-1/2}n^{\alpha},\ k=[(n-1)/2]+1,\cdots,n-1。[4,\text{引理}3.4]\tag{3.9}$$

引理1 设$\Phi_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$，$\Psi_m(x)=(1-x^2)P_n^{'(\alpha)}(x)$，则

$$L_n=\begin{cases}O(n^{-\alpha}),\ (-1<\alpha<-\frac{1}{2}) & (3.10)\\ O(n^{1/2}\log n),\ (-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}) & (3.11)\\ O(n^{\alpha}),\ (\alpha>\frac{1}{2}) & (3.12)\end{cases}$$

其中记号“O”仅与α有关。

证 记ζ_j是最接近于x的$P_n^{'(\alpha)}(x)$的零点，则

$$\sum_{k}\frac{|l_k(x)|}{|\Phi_n(\zeta_k)|}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n-1}\left|\frac{(1-x^2)P_n^{'(\alpha)}(x)}{(1-\zeta_k^2)P_n^{''(\alpha)}(\zeta_k)P_n^{(\alpha)}(\zeta_k)(x-\zeta_k)}\right|+$$

$$\left|\frac{\cdots}{P_n^{(\alpha)}(\cdots)}\right|+\left|\frac{l_0(x)}{P_n^{(\alpha)}(\xi_0)}\right|+\left|\frac{l_n(x)}{P_n^{(\alpha)}(\xi_n)}\right|=\Sigma_1+I_j+I_0+I_n。 \qquad (3.13)$$

对此，当 $\alpha>-1$，$l_j(x)=O(1)$，于是，由（3.5），（3.6），（3.8）和（3.9）推得

$$I_j+I_0+I_n=O(n^{1/2}\cdots n^{-\alpha})。 \qquad (3.14)$$

下面估计 Σ_1，设 $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$，由（3.1）—（3.4），（3.7）—（3.9）得

$$\Sigma_1=\sum_{k\neq j}\left|\frac{\sin^{\cdots}\theta_k\cdots(\cos\theta)}{\sin^{-1-2\alpha}\theta_k\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)}\right|$$

$$=O(n^{\cdots})\sum_{k\neq j}\left|\frac{\sin^{1/2-\alpha}\theta}{\sin^{-1-2\alpha}\theta_k\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)}\right|$$

$$=O(n^{1/2})\sum_{k\neq j}\left\{\left|\frac{\sin^{1/2+\alpha}\theta_k}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)}\right|+\left|\frac{1}{\sin^{-1-2\alpha}\theta_k\sin^{3/2+\alpha}\frac{1}{2}(\theta+\theta_k)}\right|\right\}$$

$$=O(n^{-1/2})\sum_{k\neq j}\left\{\frac{1}{|\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_k)|^{\cdots}}+\frac{1}{\sin^{1/2-\alpha}\theta_k}\right\}=O(n^{-\alpha})。 \qquad (3.15)$$

由（3.13）—（3.15）推得（3.10）。至于（3.11）和（3.12）可用类似的方法证得。证毕。

注意到Jacobi结点系满足条件（E），于是由引理1应用定理推得

推论1　设 $L_{2n+1}(f,x)$ 是基于 $(1-x^2)P_n^{(\alpha)}(x)P_n^{'(\alpha)}(x)$ 零点的Lagrange插值多项式，若

(i)　$-1<\alpha<-\frac{1}{2}$，$f\in \mathrm{Lip}\,r$ $(r>-\frac{1}{2}-\alpha)$，

(ii)　$-\frac{1}{2}\leq\alpha<\frac{1}{2}$，$f$满足Dini-Lipschitz条件：$\lim\limits_{n\to\infty}\omega(f,\frac{1}{n})\log n=0$；

(iii)　$\frac{1}{2}\leq\alpha<\frac{3}{2}$，$f\in \mathrm{Lip}\,r$ $(r>\alpha-\frac{1}{2})$，

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha}\{L_{2n+1}(f,x)-f(x)\}^2dx=0$。

用类似的方法，可得下面的

引理2　设 $\varphi_n(x)=P_n^{'(\alpha)}(x)$，$\psi_n(x)=P_n^{(\alpha)}(x)$，则

$$\lambda_n=\begin{cases}O(\log n/n^{\cdots}) & (-1<\alpha<-\frac{1}{2})\\ O(\frac{\log n}{n^{1/2}}+n^{\alpha}), & (\alpha\geq-\frac{1}{2})\end{cases}$$

推论2　设 $L_{2n+1}(f,x)$ 是基于 $P_n^{(\alpha)}(x)P_n^{'(\alpha)}(x)$ 零点的Lagrange插值多项式，若

(i)　$-1<\alpha\leq-\frac{1}{2}$，$f$满足Dini-Lipschitz条件，

(ii)　$-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$，$f\in \mathrm{Lip}\,r$ $(r>\alpha+\frac{1}{2})$，

则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha+1}\{L_{2n+1}(f,x)-f(x)\}^2dx=0。 \qquad (3.16)$$

上面推论1和推论2改进并推广了［1］中的相应的结果。特别，当 $-1<\alpha\leq-\frac{1}{2}$ 时，只需 f满足Dini-Lipschitz条件，即有（3.16）成立，而由［1］的推论2则需要 $f\in \mathrm{Lip}\,r$ $(r>\frac{1}{2})$ 才能有（3.16）。若与下面的特例（见［1］）相比较：当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，（3.16）对一切 $f\in C[-1,1]$ 成立，可知，条件（2.1）与（1.6）相比有显著的改善。

现在考虑情形（C），我们指出文〔1〕在计算上的一个错误．由[1]

$$M(n)\leq\frac{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha+1}(P_n^{(\alpha)}(x))^2dx}{\{(1-\xi_1^2)P_n^{'(\alpha)}(\zeta_1)\}^2}$$

$$=\frac{[(n+2\alpha+1)^2/4]\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha+1}(P_{n-1}^{(\alpha+1)}(x))^2dx}{(n+\alpha)^2(P_{n-1}^{(\alpha)}(\xi_1))^2}\sim n^{-1-2\alpha}. \qquad (3.17)$$

这是错误的，事实上，由（3.1）—（3.4）

$$\{(1-\zeta_1^2)P_n^{'(\alpha)}(\zeta_1)\}^2\sim n^{2\alpha},$$

而

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha+1}(P_n^{'(\alpha)}(x))^2dx\sim n,$$

所以，由（3.17）只能获得

$$M(n)=O(n^{1-2\alpha})\quad(-1<\alpha<0).$$

于是，根据〔1〕的计算和定理，仅在连续函数（而不可微）空间内不能推得有函数 f 满足条件（1.5）然而，由下面的推论3可知文〔1〕的推论3不仅仍然成立而且其结论可进一步改善．

注意到在推导（3.17）中损失了因子（$1-x^2$），所以，修改定理的证明方法，可以证明下面的

引理3 成立如下估计

$$L_n^*=\sup_{-1\leq x\leq 1}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{(1-x^2)^{1/2}P_n^{(\alpha)}(x)}{(1-\zeta_k^2)(P_n^{'(\alpha)}(\zeta_k))^2(x-\zeta_k)}\right|=\begin{cases}O(n^{-3/2-2\alpha}),(-1<\alpha<-\frac{1}{2})\\ O(n^{-1/2}\log n)\ (-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2})\\ O(n^{\alpha-1}),\ (\alpha>\frac{1}{2}).\end{cases}$$

推论3 设 $L_{2n+1}(f,x)$ 是基于（$1-x^2)P_n^{(\alpha)}(x)P_n^{'(\alpha)}(x)$ 零的Lagrange插值多项式，若

（i）$-1<\alpha<\frac{1}{2}$，$f\in\mathrm{Lip}\,r$（$r>-1-2\alpha$），

（ii）$-\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{1}{2}$，$f$满足Dini Lipschitz条件，

（iii）$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2}$，$f\in\mathrm{Lip}\,r$（$r>\alpha-\frac{1}{2}$），

则成立

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha}\{L_{2n+1}(f,x)-f(x)\}^2dx=0\ .$$

参考文献

〔1〕Bellen, A., A Note on Mean Covvergence of Lagrange Interpolation, J. Approxi. Th., 33(1981), 85—95.

〔2〕Szego, G., "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Coll Publ., V.23, Now York, 1939.

〔3〕П. К. Суетин Классические Ортогональные Многогочлены (издание второе). 《Наука》, Москва 1979.

〔4〕孙燮华，用Hermite-Fejer型插值多项式逼近连续函数，数学研究与评论，3(1983)，45—50.