1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

Peano核非负的最佳求积公式*

宣晓华
（杭州大学）

§1. 问题的提出

设$r \geq 1$，I_0, I_1为$I=\{0,1,\cdots,r-1\}$的子集，

$$C^r_{I_0,I_1}=\{f \in C^r[0,1],\ f^{(i)}(0)=f^{(j)}(1)=0 \quad \forall i \in I_0,\ j \in I_1\},$$

考察计算$C^r_{I_0,I_1}$中函数积分的公式：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R(f) \tag{1.1}$$

利用分部积分验计下式，有

$$R(f)=\int_0^1 f^{(r)}(x)K(x)\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

这里$K(x)$为一个满足边界条件

$$K^{(i)}(0)=K^{(j)}(1)=0 \quad \forall i \in I \setminus I_0,\ j \in I \setminus I_1$$

的多项式样条，形式如下：

$$K(x)=\frac{x^r}{r!}-\sum_{j=0}^{r-1}C_{0j}x^{r-j-1}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}C_{kj}(x-x_k)_+^{r-j-1}. \tag{1.3}$$

如果$K(x)$在区间$[0,1]$上非负，则$\forall f \in C^r_{I_0,I_1}$，

$$R(f)=f^{(r)}(\zeta)\int_0^1 K(x)\mathrm{d}x \qquad (0<\zeta<1),$$

现在我们可以提出下面的

问题　怎样选择节点组$\{x_k\}$，系数组$\{A_{kj}\}$　$(k=\overline{1,n},\ j=\overline{0,r-1})$使求积公式(1.1)对应的$\int_0^1 K(x)\mathrm{d}x$在此类$\mathfrak{M}^r_{I_0,I_1}$上具有最小值，在此

$$\mathfrak{M}^r_{I_0,I_1}=\{K:K(x)=\frac{x^r}{r!}-\sum_{j=0}^{r-1}C_{0j}x^{r-j-1}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}C_{kj}(x-x_k)_+^{r-j-1};$$

$$K^{(i)}(0)=K^{(j)}(1)=0,\quad \forall i \in I \setminus I_0,\ j \in I \setminus I_1;\ K(x) \geq 0\ \forall x \in [0,1]\}$$

如果使$\int_0^1 K(x)\mathrm{d}x$取极小的$K(x)=K^*(x)$存在，则称$K^*(x)$对应的求积公式为P意义下的的关于函数类$C^r_{I_0,I_1}$的最佳求积公式。另外，$\int_0^1 K(x)\mathrm{d}x$，$\int_0^1 K^*(x)\mathrm{d}x$分别称为$P$意义下关下关于$C^r_{I_0,I_1}$的误差界和最佳误差界。

§2. 关于$C^r_{I_0, I_1}$的最佳求积公式

由§1可知，p意义下关于$C^r_{I_0, I_1}[0, 1]$的最佳求积公式的建立归结为在类$\mathfrak{M}^r_{I_0, I_1}$上寻找$K^*(x)$，使得

$$\int_0^1 K^*(x)\,dx = \inf_{K \in \mathfrak{M}^r_{I_0, I_1}} \int_0^1 K(x)\,dx$$

以$Q_r(x)$表示首项系数为1的所有r次正多项式中在范数$\|p\|_{[-1, 1]} = \int_0^1 p(x)\,dx$下与零有最小偏差者。$Q_{0r}(x)$，$Q_{1r}(x)$分别为形如

$$p(x) = x^r + \sum_{i \in I_0} a_i x^{r-i-1}, \quad p(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1],$$

$$p(x) = x^r + \sum_{i \in I_1} a_i x^{r-i-1}, \quad p(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

的多项式中在范数$\|p\|_{[0, 1]} = \int_0^1 p(x)\,dx$下与零有最小偏差者。作为对§1中问题的一个回答，我们有

定理1 在p意义下，类$C^r_{I_0, I_1}$的最佳求积公式的节点、系数分别为：

$$x_k = (2(k-1) + \delta_0) h \quad k = \overline{1, n},$$

$$A_{1j} = \frac{(-1)^{j+1} h^{j+1}}{r!} \left(Q_r^{(r-j-1)}(-1) - Q_{0r}^{(r-j-1)}(1) \delta_0^{j+1} \right),$$

$$A_{kj} = \frac{(-1)^{j+1} h^{j+1}}{r!} \left(Q_r^{(r-j-1)}(1) - Q_r^{(r-j-1)}(-1) \right) \quad k = \overline{2, n-1}, \tag{2.1}$$

$$A_{nj} = \frac{(-1)^{j+1} h^{j+1}}{r!} \left(Q_{1r}^{(r-j-1)}(1) \delta_1^{j+1} - Q_r^{(r-j-1)}(1) \right), \quad (j = \overline{0, r-1}).$$

其中$\delta_0 = \left(\frac{\|Q_r\|_{[-1,1]}}{\|Q_{0r}\|_{[0,1]}} \right)^{\frac{1}{r}}$，$\delta_1 = \left(\frac{\|Q_r\|_{[-1,1]}}{\|Q_{1r}\|_{[0,1]}} \right)^{\frac{1}{r}}$，$h = (2n - 2 + \delta_0 + \delta_1)^{-1}$，

而最佳误差界$\int_0^1 K^*(x)\,dx = \frac{h^r}{r!} \|Q_r\|_{[-1,1]}$。

证明 对于任意形如(1.3)的$K(x)$，

$$\int_0^1 r!\, K(x)\,dx = \int_0^{x_1} K(x)\,dx + \int_{x_n}^1 K(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x)\,dx$$

$$\geqslant x_1^{r+1} \|Q_{0r}\|_{[0,1]} + (1 - x_n)^{r+1} \|Q_{1r}\|_{[0,1]} + \|Q_r\|_{[-1,1]} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right)^{r+1}$$

由于$\sum_{k=1}^{n-1} h_k^{1+a}$ $(a > 0)$为Schur凸函数，见[1]. 从而

$$\sum_{k=1}^{n-1} h_k^{1+a} \geqslant (n-1) \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} h_k}{n-1} \right)^{1+a},$$

故有

$$\int_0^1 r!\, K(x)\,dx \geqslant x_1^{r+1} \|Q_{0r}\|_{[0,1]} + (1 - x_n)^{r+1} \|Q_{1r}\|_{[0,1]} + \|Q_r\|_{[-1,1]} (x_u - x_1)^{r+1} / (2u - 2)^r \tag{2.2}$$

现在选择x_1^*，x_n^*使（2.2）式右端作为x_1，x_n的函数在点（x_1^*，x_n^*）上达到最小，不难算出

$$x_1^*=\frac{\delta_0}{2n-2+\delta_0+\delta_1}, \qquad x_n^*=\frac{\delta_1}{2n-2+\delta_0+\delta_1} \tag{2.3}$$

另一方面，一旦我们按照（2.1）式中选择$\{x_k\}$（$k=\overline{1,n}$），并将$K(x)$定义为

$$K(x)=\begin{cases} x_1^r Q_{0r}\left(\frac{x}{x_1}\right) & x\in[0,x_1), \\ h^r Q_r\left(\frac{x-x_k}{h}\right) & x\in[x_k,x_{k+1})\ (k=\overline{1,n-1}), \\ (1-x_n)^r Q_{1r}\left(\frac{1-x}{1-x_n}\right) & x\in(x_n,1], \end{cases} \tag{2.4}$$

则$K(x)$刚好为极值函数$K^*(x)$，因为，此时（2.2）式成为等式．故

$$\int_0^1 K^*(x)\,dx=\inf_{k\in\mathfrak{M}_{I_0I_1}}\int_0^1 K(x)\,dx$$

由（2.2）式，（2.3）式，立即可以算出

$$\int_0^1 K^*(x)\,dx=\frac{h^r}{r!}\|Q_r\|_{[-1,1]},$$

至于求积公式的系数可以从（1.1），（1.2）式得到与$K(x)$的关联式：

$$A_{kj}=(-1)^j[K^{(r-j-1)}(x_k-0)-K^{(r-j-1)}(x_k+0)].$$

通过（2.4）式，定理1的（2.1）式容易验证．　　　证毕

作为$C^r_{I_0,I_1}$的重要例子$C^r[0,1]$，这时$I_0=I_1=\phi$，

$$Q_{0r}(x)=Q_{1r}(x)=x^r,$$

由之〔2〕，〔4〕，有

$$Q_r(x)=\begin{cases}\{J^{(0,0)}_{[\frac{r}{2}]}(x)\}^2 & r\text{ 为偶数}, \\ (x+1)\{J^{(0,1)}_{[\frac{r-1}{2}]}(x)\}^2 & r\text{ 为奇数}.\end{cases} \tag{2.5}$$

上述表达式中$J^{(\alpha,\beta)}(x)$为在区间$[-1,1]$上关于权$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$的直交多项式，首项系数为1．由定理1和（2.5）式便可计算$\{x_k\}$，$\{A_{kj}\}$（$k=\overline{1,n}$，$j=\overline{0,r-1}$），而最佳误差界为

$$\int_0^1 K^*(x)\,dx=\begin{cases}\frac{2}{(r+1)(n-1+\varepsilon_0)^r}\left[\frac{(\frac{r}{2})!}{r!}\right]^2, & \text{若 } r\text{ 为偶数}; \\ \frac{r+1}{2(n-1+\varepsilon_1)^r}\left[\frac{(\frac{r-1}{2})!}{r!}\right]^4, & \text{若 } r\text{ 为奇数},\end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $\varepsilon_0=\frac{2^{r+1}[(\frac{r}{2})!]^4}{(r+1)(r!)^3}$，　$\varepsilon_1=\frac{2^{r-1}(r+1)[(\frac{r-1}{2})!]^4}{(r!)^3}$．

上述关于（1.1）型求积公式的结论不难推广到Markov型的求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{i\in I_0}b_i f^{(i)}(0)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+\sum_{i\in I_1}c_i f^{(i)}(1)+R(f). \tag{2.7}$$

定理 2　在p意义下，关于$C^r[0,1]$的Markov型的最佳求积公式的节点和系数为

$\{x_k\}$，$\{A_{kj}\}$ $(k=\overline{1,n},\ j=\overline{0,r-1})$ 由（2.1）式所定义，

$$b_i=\frac{(-1)^i}{r!}x_1^{i+1}Q_{0r}^{(r-i-1)}(0) \qquad i\in I_0, \tag{2.8}$$

$$c_i=\frac{(-1)}{r!}(1-x_n)^{i+1}Q_{1r}^{(r-i-1)}(0) \qquad i\in I_1$$

而最优误差界 $\int_0^1 K^2(x)\,dx$ 同于定理1中相应之值。

定理的证明可参阅〔3〕。实际上，我们只需注意到以下事实：对于任意的 $f\in C^r[0,1]$，当在（2.7）中适当选择 $\{b_i\}$，$\{c_i\}$ 时，通过分部积分可以看出，这相当于为 f 添加边界条件：

$$f^{(i)}(0)=f^{(j)}(1)=0 \qquad \forall i\in I_0,\ j\in I_1.$$

由定理2，容易得到如下的

推论 在 P 意义下，关于 $C^r[0,1]$ 的Hermite型最佳求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{r-1}[b_if^{(i)}(0)+c_if^{(i)}(1)]+R(f)$$

的系数及最佳误差界分别为

$$b_i=(-1)^ic_i=\frac{1}{r!\,2^{i+1}}Q_r^{(r-i-1)}(1),\quad \int_0^1 K^2(x)\,dx=\frac{1}{r!\,2^r}\|Q_r\|_{[-1,1]},\quad (i=0,1,\cdots,r-1).$$

这里 $Q_r(x)$ 为（2.5）式表示者。

注记 如果求积公式限制为插值型，则相应的问题见于〔4〕，文〔5〕推广了带权 $x^r(1-x)^r$ 的积分计算。一般地有带权 $(x-a)^{2r}$ $(0<a<1)$ 的问题，这需要解决如下的极值问题

$$\int_0^1 (x-a)^{2r}p_m^*(x)\,dx=\inf_{p_m>0}\int_0^1 (x-a)^{2r}p_m(x)\,dx,$$

这里 $p_m(x)$ 为首项系数为1的 m 次多项式，变更函数类，问题可以归结寻求在首项系数为1的多项式中的以下极值者

$$\|(x-a)^{2r}p_m^*(x)\|=\inf_{p_m}\|(x-a)^{2r}p_m(x)\|.$$

文〔6〕证明了 $p_m^*(x)$ 有类似于切比雪夫多项式的交错点性质，所以它的计算，我们可以通过类似的里米兹算法。

参 考 文 献

〔1〕Marshall, A.W., and O'kin, I., Inequality: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, 1979.

〔2〕Locher, F., Optimale definite Polynome und Quadraturformeln. Erscheint in "Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik", Basel, Birkhäuser verlag.

〔3〕Levin, M., and Girshovich, J., Optimal Quadrature Formulas, Teubner verlag, Leipzig, 1979.

〔4〕Locher, F., Zur Structur von Quadraturformeln, Numer. Math., 20(1973), 317-326.

〔5〕Levin, M., Optimal Quadrature Formula of Markov's and Locher's Type with Weight Function, Numer. Math., 40(1982), 31-37.

〔6〕Lachance, M., J.Appr ox.Theory, 37(1983), 224 2...