平稳弱相关过程积分的收敛性*

林　正　炎
（杭州大学）

一　引　言

在随机微分方程的理论中，具有渐近正态性的解常是使人特别感兴趣的．作为实际问题中经常遇到的弱相关模型，已被许多人研究．在Purkert和Vom Scheidt〔1〕，〔2〕，〔3〕，Boyce和Xia〔4〕等文献中，人们就曾研究过形如

$$\xi(t,\omega)=\int_0^1 G(t,x)g(x,\omega)\mathrm{d}x\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)\qquad(1)$$

的随机过程的一维分布的渐近正态性．在夏宁茂〔5〕中，又考察了形如

$$\eta(t,\omega)=\int_0^t G(x)g(x,\omega)\mathrm{d}x\qquad(0\leqslant t\leqslant T)\qquad(2)$$

的随机过程的任意有限维分布的渐近正态性．

在上面给出的随机过程的定义中，$G(t,\omega)$ 是Green函数，$G(x)$ 是具有光滑的一阶导数的函数，而$g(x)$ 是所谓的弱相关随机过程，在本文中，我们总假设它们满足〔4〕、〔5〕中所要求的各种条件．弱相关过程是通过引入"ε-相邻"的概念来定义的(见〔1〕等)：设$S=(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n个实数，ε是一正数，$S_1=(x_{i_1},\cdots x_{i_k})$ 是S的一个子集．不防设$x_{i_1}\leqslant x_{i_2}\leqslant\cdots\leqslant x_{i_k}$．称$S_1$是$\varepsilon$相邻的，如果$x_{i_2}-x_{i_1}\leqslant\varepsilon, x_{i_3}-x_{i_2}\leqslant\varepsilon,\cdots, x_{i_k}-x_{i_{k-1}}\leqslant\varepsilon$。一个单点集总认为是$\varepsilon$ 相邻的．如果S_1是ε-相邻的，且(在S中)不再包含更大的ε-相邻集，则称S_1关于S是极大ε 相邻的．可以证明(见〔2〕)，总可用唯一的方式将S分解为一些不相交的极大ε 相邻集之和．广义平稳过程$g(x)$ 称为以ε为相关长度的弱相关过程，如果将任意的参数集中的n个实数$S=(x_1,\cdots,x_n)$ 分解为不相交的极大ε 相邻集$(x_{11},\cdots,x_{1p_1})$，$(x_{21},\cdots,x_{2p_2})$，$\cdots$，$(x_{k1},\cdots,x_{kp_k})$ 后总有

$$\langle g(x_1)\cdots g(x_n)\rangle=\langle g(x_{11})\cdots g(x_{1p_1})\rangle\cdots\langle g(x_{k1})\cdots g(x_{kp_k})\rangle,\qquad(3)$$

其中记号〈・〉表示取数学期望．不防假设$\langle g(x)\rangle=0$，当$n=2$时，由平稳性，(3)式成为

$$\langle g(x_1)g(x_2)\rangle=\begin{cases}0, & |x_1-x_2|>\varepsilon,\\ \sigma^2\rho(x_2-x_1), & |x_1-x_2|\leqslant\varepsilon,\end{cases}\qquad(4)$$

其中$\sigma^2=\langle g^2(x)\rangle$，$\rho(t)$ 是平稳过程$g(x)$ 的自相关函数，$\rho(0)=1$。

对于由(1)或(2)定义的随机过程，在对固定的 t 给出了它们的一维分布的渐近正态性后，研究它与正态变量的以概率1的渐近性质无疑是一个很有意义的课题．本文的第一个结果即是关于这方面的．在给定了(2)中的随机过程$\eta(t)$ 的有限维分布的渐近正态性后，接下去一个自然的问题是讨论在函数空间$C(0,T)$ 上这个过程向Gauss过程的弱收敛性．本

*1984年7月25日收到．国家科学基金资助的课题．

文的第二个结果给出了一个关于 $\eta(t)$ 的不变原理．作为这一结果的直接推论，可以给出 $\eta(t)$ 的任何连续泛函向作为极限的 Gauss 过程的相应泛函的依分布的收敛性．

二、强 逼 近

作为〔4〕中的主要结果，不仅给出了（1）中定义的随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布的渐近正态性，而且还求出了分布的渐近展式．在〔5〕中对于（2）中定义的 $\eta(t)$，虽然没有提到它的渐近展式，但是由关于矩的估计类似于 $\xi(t)$ 的结论是很容易看出的．我们着重讨论 $\xi(t)$．在本小段中，总把 t 看作固定的常数．记

$$A_1=A_1(t)=2\int_0^1 G^2(t,x)\langle g^2(x)\rangle \mathrm{d}x,\quad A_3=A_3(t)=6\int_0^1 G^3(t,x)\langle g^3(x)\rangle \mathrm{d}x,$$

又记 $\xi(t)/\sqrt{A_1(t)\varepsilon}$ 的分布函数为 $F(x)$．则有

$$F(x)=\Phi(x)-\frac{\sqrt{\varepsilon}\,A_3}{\sqrt{2\pi}\cdot 6\,A_1^{3/2}}(x^2-1)e^{-x^2/2}+O(\varepsilon)\qquad(\varepsilon\to 0)\tag{5}$$

（参见〔4〕中（3.21）等式）．

定理 1 对于（1）中定义的随机变量 $\xi=\xi(t)$，存在一标准正态变量 $N=N(t)$，使当 $|\xi|\le c\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}$ $(0<c<1)$ 时，成立．

$$\left|\frac{\xi}{\sqrt{A_1\varepsilon}}-N\right|\le(1+o(1))D\sqrt{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\qquad(\varepsilon\to 0),$$

其中 $D=A_3/6A_1^{3/2}$．

证 定义随机变量 $\mathrm{N}=\mathrm{inv}\Phi(F(\xi/\sqrt{A_1\varepsilon}))$．

我们来证明它满足定理的要求．事实上，由中值定理，

$$|x-\mathrm{inv}\Phi(F(x))|=|\mathrm{inv}\Phi(\Phi(x))-\mathrm{inv}\Phi(F(x))|$$

$$=|\Phi(x)-F(x)|\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{inv}\Phi(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=\theta_x}=|\Phi(x)-F(x)|\frac{1}{\Phi'(\mathrm{inv}\Phi(\theta_x))},\tag{6}$$

其中 $\min(\Phi(x),F(x))\le\theta_x\le\max(\Phi(x),F(x))$．对于 $|x|\le c\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}$ $(0<c<1)$，由(5)式易得当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\frac{\theta_x}{\Phi(x)}=1+o(1),\quad\frac{1-\theta_x}{1-\Phi(x)}=1+o(1).\tag{7}$$

考虑 $\Phi(x)\le\theta_x\le\frac{1}{2}$ 的情形．若记 $y=\mathrm{inv}\Phi(\theta_x)$，则 $x\le y\le 0$．利用（7）式，

$$|x||x-y|=\frac{|x-y|e^{-x^2/2}}{e^{-x^2/2}/|x|}\le\frac{\left|\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^y e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\right|}{\int_{-\infty}^x e^{-u^2/2}\mathrm{d}u}=\frac{|\Phi(x)-\theta_x|}{\Phi(x)}\to 0,\quad(\varepsilon\to 0)$$

更有 $|y||x-y|\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$．故得

$$|x^2-(\mathrm{inv}\Phi(\theta_x))^2|=|x^2-y^2|\to 0.\tag{8}$$

类似地对于 $\Phi(x),\theta_x$ 的其它情形也有同样的结论．将（5）和（8）代入（6）式，对于 $|x|\le c\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}$，得

$$|x-\mathrm{inv}\Phi(F(x))|\le\left|\frac{D}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)e^{-x^2/2}\sqrt{\varepsilon}+O(\varepsilon)\right|(\sqrt{2\pi}e^{x^2/2}+o(1))$$

$$\le(1+o(1))D\sqrt{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon},$$

定理证毕.

注1 当$A_3=0$时，利用〔4〕中关于$F(x)$的进一步的展开式(〔4〕中的(4.15)等式)，我们可以将定理1的结论改写成为

$$\left|\frac{\xi}{\sqrt{A_1\varepsilon}}-N\right|\leqslant(1+o(1))\varepsilon\left\{\frac{A_2}{2A_1}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{A_4}{24A_1^2}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}\right\},\qquad(\varepsilon\to 0),$$

其中的常数A_2, A_4见〔4〕中的(4.33)和(4.41)式.

注2 对于随机过程$\eta(t)$，我们有类似的结论：存在标准正态变量N'，当$|\eta|\leqslant c\sqrt{\log\frac{1}{\varepsilon}}$ $(0<c<1)$时，

$$\left|\frac{\eta}{\sqrt{B\varepsilon}}-N'\right|=O\left(\sqrt{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

其中$B=B(t)=2\sigma^2\int_0^t G^2(x)\,dx$.

三 弱 不 变 原 理

定理2 当相关长度ε趋于零时，随机过程$\frac{\eta(t)}{\sigma\sqrt{2\varepsilon}}$在$C(O,T)$上弱收敛于Gauss过程$H(t,\omega)=\int_0^t G(x)\,dW(x,\omega)$. 其中$W$为标准Wiener过程.

证 记$\zeta(t,\omega)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\varepsilon}}\int_0^t g(x,\omega)\,dx$. 我们首先来证明当$\varepsilon\to 0$时，

$$\zeta(\cdot)\Rightarrow W(\cdot).\tag{9}$$

我们只需对任意一列$\varepsilon_n\downarrow 0$相应的随机过程序列都弱收敛于$W$就够了(参见Billingsley〔6〕, P.16). 在〔5〕的定理1中已证明ζ的任意有限维分布收敛于W的相应的有限维分布. 因此，根据〔6〕中的定理8.1, 为证明(8)式只要证明$\zeta(\cdot)$是紧的(tight)就够了. 为此，对任意的$0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$, 我们来估计$\langle|\zeta(t_2)-\zeta(t_1)|^4\rangle$. 当$(t_2-t_1)^{\frac{4}{3}}\geqslant 2\varepsilon$时，完全类似于〔4〕、〔5〕等文中的计算(参见〔4〕之(2.38b)等式)，

$$\langle|\zeta(t_2)-\zeta(t_1)|^4\rangle=\frac{1}{\sigma^4(2\varepsilon)^2}\left\langle\left|\int_{t_1}^{t_2}g(x)\,dx\right|^4\right\rangle\leqslant c_1\left(\int_{t_1}^{t_2}\langle g^2(x)\rangle dx\right)^2+c_2\varepsilon\leqslant c_3(t_2-t_1)^{\frac{4}{3}},\tag{10}$$

其中$c_1 c_2,\cdots$是正常数. 而当$(t_2-t_1)^{\frac{4}{3}}<2\varepsilon$时，应用Hölder不等式

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}g(x)\,dx\right|^4\leqslant\left(\int_{t_1}^{t_2}dx\right)^3\left(\int_{t_1}^{t_2}g^4(x)\,dx\right),$$ 故有

$$\langle|\zeta(t_2)-\zeta(t_1)|^4\rangle\leqslant\frac{1}{\sigma^4(2\varepsilon)^2}(t_2-t_1)^3\int_{t_1}^{t_2}\langle g^4(x)\rangle dx=\frac{c_4}{\varepsilon^2}(t_2-t_1)^4\leqslant c_5(t_2-t_1)^{\frac{4}{3}}.\tag{11}$$

由(10)和(11)两式，并利用〔6〕之定理12.3, 即知$\zeta(\cdot)$是紧的. 这就证明了(9)式.

注意到$C(0,T)\to C(0,T)$的泛函$h(X)(\cdot)=\int_0^{\cdot}G(x)\,dX(x)$是连续的，并应用〔6〕中的定理5.1, 既可得到定理的结论.

注3 利用上面定理中证明的(9)式和关于连续映射的弱收敛定理，我们可以得到其它种类的积分过程向Gauss过程的弱收敛性. 例如当二元函数$G(t,x)$满足一定的条件时(比方说，在〔0，1〕×〔0，1〕上有界，关于x的全变差对t一致有界)，积分过程$\int_0^1 G(t,x)g(x,\omega)\,dx$弱收敛于Gauss过程$\int_0^1 G(t,x)\,dW(x,\omega)$.

参 考 文 献

〔1〕Purkert, W., Vom Scheidt, J., Randwertprobleme mit schwach korrelierten Prozessen als Koeffizienten, in Transactions of Eighth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes B, 107-118(1978).

〔2〕Purkert, W., Vom Scheidt, J., Stochastic eigrwalue problems for differential equations, Rep. Math. Phys., 15, 205-227(1979).

〔3〕Vom Scheidt, J., Purkert, W., Limit theorems for solutions of stochastic differential equation problems, Int. J. Math. and. Math. Sci., 3, 113-149(1980).

〔4〕Boyce, W. E., Xia, N., The approach to normality of the solutions of random boundary and eigenvalue Problems with weakly correlated coefficients, Quart. Appl. Math., 40, 419-445(1983).

〔5〕夏宁茂，平稳弱相关过程积分的渐近分布，投《数学年刊》。

〔6〕Billingsley, P., Convergence of Probability Measures, J. Wiley, New York (1968).

Convergence of the integration of the stationary weakly correlated process

Lin Zheng-yan

Let $g(x,\omega)$ be a stationary weakly correlated process, $G(t,x)$ be the Green's function and $G(x)$ be a function with a smooth one-order derivative. Define stochastic processes

$$\xi(t,\omega)=\int_0^1 G(t,x)g(x,\omega)\,dx \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

and

$$\eta(t,\omega)=\int_0^t G(x)g(x,\omega)\,dx \qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

In this paper we give the strong approximations of random variables $\xi(t)$ and $\eta(t)$ to normal variables, and also give a weakly invariance principle for process $\eta(\cdot)$.