相 对 遗 传 模*

唐 忠 明

（山东大学，济南）

本文首先利用正向极限的相对内射性和直和的相对内射性刻划了Noether环．然后，给出了弱相对遗传模、弱相对余遗传模和相对遗传模的定义，且得到了一些性质．特别讨论了自遗传模的自同态环。

Ⅰ．相对投射模与相对内射模

在本文中，R是带有单位元的结合环，所有模都是左R-酉模．我们把映射写在元素的右边，因而，如果M是左R-模，$S=\mathrm{End}_R(M)$，则M是左R-右S-双模．

1.1定义 设E，M是R-模，E称为是M-内射的（或相对于M是内射的）．如果对任意的R-模N和任意的单同态f：N→M及同态g：N→E，存在同态h：M→E使得$g=fh_0$对偶地，可以定义M-投射模．

1.2定义 （i）设A，B是R-模，θ：A→B是一个满同态．θ称为是M-满的，如果存在同态ψ：A→M使得$\ker\theta\cap\ker\psi=0$．此时也称B是A的M-同态像．

（ii）设α：A→B是单同态，α称为是M-单的，如果存在同态β：M→B，使得$\mathrm{Im}\,\alpha\cup\mathrm{Im}\,\beta$生成了B．此时也称A是B的M-子模．

1.3命题 ［5］对R-模H，下列结论等价：

（1）H是M-投射的；（2）对任意的M-满同态θ：A→B和同态f：H→B，存在同态h：H→A使得$f=h\theta$．（3）每个M-满同态θ：C→H是分裂的．

1.4定理 ［1］设M是R-模，则有：

（1）所有M-投射模构成的类$C_p(M)$在直和、直和项下是封闭的；

（2）所有M-内射模构成的类$C_i(M)$在直积、直商下是封闭的；

（3）所有使得M是N-投射的模N所构成的类$C^p(M)$在子模、同态像和有限直和下是封闭的；如果M是有限生成的，则$C^p(M)$在任意直和下是封闭的；如果M有投射复盖，则$C^p(M)$在任意直积下是封闭的．

（4）所有使得M是N-内射的模N构成的类$C^i(M)$在子模、同态像及任意直和下是封闭的．

1.5引理 模E是M-内射的当且仅当对所有$m\in M$，E是Rm-内射的．

证 假定E是M-内射的，由1·4(4)，$C^i(E)$在子模下封闭，因而对任意的$m\in M$，E是

*1984年10月23日收到．

Rm-内射的.

反之，假定对所有$m\in M$，E是Rm-内射的，再由1·4(4)，$C^i(E)$在任意直和下封闭，故E是$\bigoplus_{m\in M}Rm$-内射的. 而$C^i(E)$在同态像下封闭，M是$\bigoplus_{m\in M}Rm$的同态像，因而E是M-内射的.

关于模的正向极限，我们陈述下列熟知的结论.

1.6定理 设$\{E_i,\varphi_j^i\}$是拟序指标集I上的R-模的正向系统，则$\varinjlim E_i=\bigoplus E_i/S$，其中S是由子集$\{e_i\varphi_j^i\lambda_j-e_i\lambda_i \mid i\leqslant j, e_i\in E_i,\ \lambda_i$是$E_i$到$\bigoplus E_i$的内射$\}$生成的子模. 如果I是有向的，则有：

(1) $\varinjlim E_i=\{e_i\lambda_i+S \mid e_i\in E_i\}$.

(2) $e_i\lambda_i+S=\overline{0}$当且仅当存在$t\geqslant i$使得$e_i\varphi_t^i=0$.

1.7定理 对环R，下列结论等价：

(1) R是左Noether环；

(2) 在有向指标集上，对任意的R-模M，M-内射模的正向极限是M-内射的；

(3) 对任意的R-模M，M-内射模的直和是M-内射的.

证 (1)⇒(2). 假定R是左Noether的，设M是任意的R-模，$\{E_i,\varphi_j^i\}$是有向指标集上的M-内射模的正向系统. 由1·6，$\varinjlim E_i$由元素$[e_i]=e_i\lambda_i+S$，$e_i\in E_i$构成，由1·5，只需证明对每个$m\in M$，$\varinjlim E_i$是Rm-内射的.

设N是Rm的一个子模且有同态$f: N\to\varinjlim E_i$，由R是Noether知Rm是Noether的. 因而N是有限生成的，设$N=(a_1,\cdots,a_n)$. 令F_n是以$x_1,\cdots,x_n$为基的自由模，则有正合序列：$0\to K\to F_n\to N\to 0$. 这里$F_n\to N$把x_i映到a_i，K是其核. 由于R是Noether的可知K是有限生成的，设$K=(y_1,\cdots,y_t)$. $y_p=\sum r_{p_j}x_j$，$r_{p_j}\in R$，$p=1,\cdots,t$.

设$(a_j)f=[e_{i(j)}]$，由于指标集是有向的，故存在k，使得对所有j，有$k\geqslant i(j)$. 令$e^j=e_{i(j)}\varphi_k^{i(j)}$. $j=1,\cdots,n$，因而$(a_j)f=[e^j]$，由于$y_p\in K$，得$[\sum r_{p_j}e^j]=0$，由1·6，对每个p，存在$q(p)\geqslant k$使得$(\sum r_{p_j}e^j)\varphi_{q(p)}^k=0$. 选取$m_1$使得对所有$p$有$m_1\geqslant q(p)$，定义$b^j=e^j\varphi_{m_1}^k$则$b^j\in E_{m_1}$，$j=1,\cdots,n$，$(a_j)f=[b^j]$且$\sum r_{p_j}b^j=0$.

定义$f^*: N\to E_{m_1}$为$a_j\to b^j$，若$\sum a_ja_j=0$，$a_j\in R$则有$l_p\in R$，使得$\sum a_jx_j=\sum l_py_p=\sum l_p\cdot(\sum r_{p_j}x_j)$. 因而$\sum a_jb^j=\sum l_p(\sum r_{p_j}b^j)=0$，故$f^*$是良定义的. 由于$E_{m_1}$是M-内射的，因而是Rm-内射的，故存在$f^*$的扩张$g^*$: $Rm\to E_{m_1}$. 定义g: $Rm\to\varinjlim E_i$如$x\to[(x)g^*]$则g是f的扩张，因而$\varinjlim E_i$是Rm-内射的.

(2)⇒(3). 设$\{E_i \mid i\in I\}$是一个M-内射R-模的集合. 由1·4，$\{E_i \mid i\in I\}$中的任意有限个模的直和还是M-内射的. 而$\{E_i \mid i\in I\}$的直和是其有限子集的直和在包含关系下的正向极限. 由(2)，即得$\bigoplus_{i\in I}E_i$是M-内射的.

(3)⇒(1). 由于R-内射模是内射的，特别地取$M=R$，得内射模的直和是内射的. 故R是Noether的.（参见[2]）.

1.8推论 设R是左Noether环，M, N是R-模，如果N的所有有限生成的子模是M-内射的，则N是M-内射的.

证 在包含关系下，N是其有限生成子模族的正向极限.

1.9推论 设R是左Noether环，M、N是R-模且有N的子模的递增序列：$N_1\subseteq N_2\subseteq\cdots$. 如果每个$N_i$是M-内射的，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i$也是M-内射的.

证　在包含关系下，$\{N_i|i=1,2,\cdots\}$ 的正向极限是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}N_i$.

2．弱相对遗传模和弱相对余遗传模

2.1定义　设M、N是R-模，N称为是相对于M是弱遗传的(或M-弱遗传的)，如果N的每个M-子模是M-投射的；N称为是相对于M是弱余遗传的(或M-弱余遗传的)，如果N的每个M-同态像是M-内射的．

2.2命题　如果模P的每个子模是M-投射的，则每个P-内射模的M-同态像是P-内射的．

证　设N是P-内射模，$N\xrightarrow{\theta}N_1\to 0$ 是M-满同态，$0\to P_0\xrightarrow{i}P$ 是单同态，且有：

$$\begin{array}{l} 0\to P_0\xrightarrow{i}P \\ \quad\; N\xrightarrow{\theta}N_1\to 0 \end{array}$$

由假定P_0是M-投射的，而θ是M-满的，故有同态g: $P_0\to N$使得$f=g\theta$．又N是P-内射的，因而存在h: $P\to N$使得$g=ih$，则$h\theta$: $P\to N_1$使得$i(h\theta)=g\theta=f$，因此N_1是P-内射的．

2.3推论　如果M的每个子模是M-投射的，则所有M-内射模都是M-弱余遗传的．

类似于2·2，可以证明：

2.4命题　如果P的每个同态像是M-内射的，则每个P-投射模的M-子模是P-投射的．

2.5推论　如果M的每个同态像是M-内射的，则所有M-投射模都是M-弱遗传的．

2.6推论　如果M是拟投射、拟内射的R-模(例如M=R是自内射环)．则下列结论等价：

(1) 所有M-投射模是M-弱遗传的；

(2) 所有M-内射模是M-弱余遗传的．

证　M的每个子模是M-子模；每个满同态$M\to N$是M-满的．由2·3，2·5即得证．

2.7命题　设R是一个环，P是一个R-投射模，如果对R的所有左理想I，R/I是P-内射的．则P是R-弱遗传的．

〔**注**〕　这里的R-投射及证明中的R-单同态都是在把R看成R-模的意义下．

证　假定$0\to P_1\xrightarrow{i}P$是R-单同态，且有：

$$\begin{array}{l} 0\to P_1\xrightarrow{i}P \\ \quad\; R\xrightarrow{v}R/I\to 0 \end{array}$$

这里的v是自然同态．由于$0\to P_1\xrightarrow{i}P$是R-单的，故有f_1: $R\to P$使得$P_1\cup \mathrm{Im}\,f_1$生成了P，因而存在$x\in P$使得$P_1+Rx=P$．如果$x\in P_1$，则$P_1=P$是R-投射的．下面假定$x\notin P_1$．令$I_1=\{r\in R|rx\in P_1\}$则I_1是R的一个左理想，I_1x是P_1的子模．由于R/I是P-内射的，由1·5，R/I是Rx-内射的，因而$f|I_1x$可扩张到$Rx\to R/I$，故存在$\bar{r}_0\in R/I$，使得对任意的$r_1\in I_1$，$(r_1x)f=r_1\bar{r}_0$．定义g: $P=P_1+Rx\to R/I$为$(p_1+rx)g=(p_1)f+r\bar{r}_0$，$r\in R$，$P_1\in P_1$．如果$P_1, P_2\in P_1$ $r_1, r_2\in R$使得$P_1+r_1x=P_2+r_2x$，则$P_1-P_2=(r_2-r_1)x$，因而$r_2-r_1\in I_1$，$(P_1-P_2)f=((r_2-r_1)x)f=(r_2-r_1)\bar{r}_0$，故$(p_1)f+r_1\bar{r}_0=(p_2)f+r_2\bar{r}_0$，$g$是良定义的．可见$g$是同态且扩张了$f$即$f=ig$．因为P是R-投射的，故存在$h$: $P\to R$使得$g=hv$，则ih: $P_1\to P$使得$(ih)v=ig=f$．因而P_1是R-投射的，于是P是R-弱遗传的．

3．相对遗传模

3.1定义　模P称为是M-遗传的(或相对于M是遗传的)，如果P的每个子模是M-投射

的．如果P是P-遗传的，则称P是自遗传的，对偶地可定义M-余遗传模．由1·4，即得：

3.2命题 如果模P是M_i-遗传的，$i=1,\cdots,n$，则P也是$\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$-遗传的．如果P是M_α-余遗传的，$\alpha\in I$，则P也是$\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha$-余遗传的．

3.3定理 （[1]） 对环R，下列结论等价：

（1） R是半完全的；

（2） R有正交幂等元集$\{e_i|i=1,\cdots,n\}$使得：$1=e_1+\cdots+e_n$且每个e_iRe_i是局部环．

3.4命题 设R是左完全环，$e\in R$是本原幂等元，如果Re是自遗传的，则eRe是一个除环．

证 设R的Jacobson根为J，由于R是半完全的且e是本原幂等元．由3·3，$eRe=\mathrm{End}_R(Re)$是一个局部环，因而我们只需证明它的根eJe为零．

如果$eJe\neq0$，则有$x\in J$使$exe\neq0$，我们有非零的R-模同态a：$Re\to Re$，$(re)a=rexe$．而$\mathrm{Im}a$是Re的子模，Re是自遗传的，故a：$Re\to\mathrm{Im}\,a$分裂．因Re是不可分的且$\mathrm{Im}\,a\neq0$．因而$\ker a=0$．又R是左完全的，由[3]的定理P，J是左T-幂零的．故存在整数$n>1$使得$(xe)^n=0$，$(xe)^{n-1}\neq0$，则$0=(xe)^n=(xe)^{n-1}exe=(xe)^{n-1}a$，而$a$是单的，故$(xe)^{n-1}=0$，这是一个矛盾，因此$eJe=0$．

3.5命题 设R是左完全环，$\{e_i|i=1,\cdots,n\}$是R的正交本原幂等元集且$1=e_1+\cdots+e_n$如果每个Re_i是自遗传的，则R是半准素的．

证 只需证明R的Jacobson根J是幂零的，展开$J^n=(e_1+\cdots+e_n)(J(e_1+\cdots+e_n))^n$得$J^n$是下列项的和：

$$e_{a_1}Je_{a_2}Je_{a_3}\cdots e_{a_n}Je_{a_{n+1}},\quad e_{a_k}\in\{e_i|1\leqslant i\leqslant n\}$$

在此项中一定有某个e_{a_j}至少出现两次，由3·4，$e_{a_j}Je_{a_j}=0$，因而$J^n=0$．

3.6引理 如果P是自遗传的，则环$S=\mathrm{End}_R(P)$的每个主左理想是投射的．

证 设$a\in S$．则a：$P\to P$是自同态，$Q=\mathrm{Im}\,a$是P的子模，由假定Q是P-投射的，故a：$P\to Q$分裂．因而存在同态b：$Q\to P$使得$ba=|_Q$，Qb是P的直和项．设π是P在Qb上的投射，定义ρ_b：$Sa\to S\pi$ $(sa)\rho_b=sab$．由于P是拟投射的，对任意的sab：$P\to Qb$我们有τ：$P\to P$使得$\tau\pi=sab$，因而ρ_b是一个同态．假定存在$s\in S$使得$sab=0$，则$\forall x\in P$，$(x)sab=0$，故$0=(x)saba=(xsa)ba=(x)sa$．于是$sa=0$，ρ_b是单的．又由P的拟投射性，存在$\tau\in S$使得$\pi=\tau ab=(\tau a)\rho_b$．于是$\rho_b$是满的．故$Sa\cong S\pi$．而$\pi$是幂等元，故$Sa$是投射的．

3.7引理 如果P是自遗传的，则对任意的整数$n>0$，$P^{(n)}$也是自遗传的．

证 由3·2，只需证明$P^{(n)}$是P-遗传的．假定$n\geqslant2$．$P^{(n-1)}$是P-遗传的，令$P_1=P$，设j_1：$P^{(n)}=P_1\bigoplus P^{(n-1)}\to P_1$，$j_2$：$P^{(n)}\to P^{(n-1)}$是投射．设A是$P^{(n)}$的任意一个子模，则$j_2(A)$是$P^{(n-1)}$的子模，因而是P-投射的，又$j_1|_A$：$A\to P$，$\ker j_1|_A\cap\ker j_2|_A=0$．故$j_2|_A$：$A\to j_2(A)$是P-满同态，因而分裂．故有A的子模$A_2$使得$A=(\ker j_2|_A)\bigoplus A_2$，$A_2\cong j_2(A)$，而$\ker j_2|_A$同构于P的一个子模，因而也是P-投射的．故A是P-投射的．于是$P^{(n)}$是P-遗传的．

3.8定理 如果P是自遗传的左R-模，则环$S=\mathrm{End}_R(P)$是左半遗传的．

证 由[4]的定理2·4只需证明对所有整数$n>0$．$\mathrm{End}_S(S^{(n)})$的每个主左理想是投射的．注意到作为环有同构：$\mathrm{End}_R(P^{(n)})\cong\mathrm{End}_S(S^{(n)})$（见[1]）．由3·7，$P^{(n)}$是自遗传的．

由3·6得$\mathrm{End}_R(P^{(n)})$的每个主左理想是投射的.

3.9推论 如果环R的每个左理想是R-投射的，则R的每个有限生成的左理想是投射的.

参考文献

[1] Anderson. F. W and Fuller. K. R., Rings and Categories of Modules, Springer Verlag, New York, 1973.

[2] Bass. H., Injective dimension of Noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc., 102(1962), 18—29.

[3] Bass. H., Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans Amer Math. Soc., 95(1960), 466—488.

[4] Colby. R. R. and Rutter. E. A. Jr., Generalization of QF—3 Algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 153(1971), 371—386.

[5] Shrikhande. M. S., On hereditary and cohereditary modules, Canad. J. Math., XXV(1973), 892—896.

Relative Hereditary Modules

Tang Zhongming

(Shandong University)

Abstract

In this paper, the concepts of a weakly relative hereditary module, a weakly relative cohereditary module and a relative hereditary module are introduced. The endomorphism rings of self hereditary modules are studied. We prove that for P a left self-hereditary module $S=\mathrm{End}_R(P)$ is left semi hereditary as a ring.