强P除环上方阵的酉相似理论(Ⅱ)*

屠　伯　埙

（复旦大学）

本文继续前文（Ⅰ）[2]的讨论，主要讨论加强p除环上自共轭阵与正定自共轭阵酉相似于对角阵的理论及其各种应用．由于实四元数环是一个加强p除环，故本文一切结论对实四元数除环上的方阵自然也正确．

本文以下的记号均沿用文（Ⅰ）的记号，除必要者外，一般不再另作说明．

在本文中，先用一个特殊的方法，证得强p除环Ω上任一自共轭阵（在Ω上）相似于它的中心上的自共轭三对角阵这一基本结论，把除环上的某些方阵问题化为它的中心域上的方阵问题，由此推导出加强p除环上自共轭阵与正定自共轭阵理论中的一串基本结论．

定理1（中心化定理）　设A是强p除环，Ω上的$n\times n$自共轭阵，则必存在Ω上非奇异阵P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a_1 & r_1 & & & \\ r_1 & a_2 & r_2 & & \\ & r_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & r_{n-1} \\ & & & r_{n-1} & a_n \end{pmatrix}=J, \tag{1}$$

而a_i，r_j全是$R(\subseteq Z)$的元素$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n-1$（Z是Ω的中心）．

证　由［2］中的定理6，存在Ω上酉阵Q，使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ \overline{b}_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \overline{b}_2 & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & \overline{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix}=J_1, \tag{2}$$

其中$a_i\in R$；$i=1,2,\cdots,n$．

（i）如果b_i全是非零元：$i=1,2,\cdots,n$，则因Ω是强p除环，故存在$\|b_i\|\in R$，使

$$\|b_i\|^2=b_i\overline{b}_i\neq 0；\quad i=1,2,\cdots,n-1, \tag{3}$$

今对（2）式右端矩阵J_1作一串初等变换及其相应的逆变换如下：先以$\|b_1\|\cdot\overline{b}_1^{-1}$左乘$J_1$的第二行，则得

*1985年8月9日收到．

$$J_1 \to \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ \|b_1\| & \|b_1\|\bar{b}_1^{-1}a_2 & \|b_1\|\bar{b}_1^{-1}b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & \bar{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = A_1$$

再将上式右端矩阵A_1作相应的列的逆变换：即以$\bar{b}_1 \cdot \|b_1\|^{-1}$ 右乘A 的第 2 列，由于a_2，$\|b_1\| \in R$，即它们与Ω中任何元素可交换，故由（3）式得：

$$J_1 \to A_1 \to \begin{pmatrix} a_1 & \|b_1\| & & & & \\ \|b_1\| & a_2 & \|b_1\|\bar{b}_1^{-1}b_2 & & & \\ & \|b_1\|^{-1}\bar{b}_2\bar{b}_1 & a_3 & b_3 & & \\ & & \bar{b}_3 & a_4 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & \bar{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = J_2$$

再以 $\|b_2\| \cdot \|b_1\| \cdot \bar{b}_1^{-1}\bar{b}_2^{-1}$左乘$J_2$的第 3 行，得到矩阵$A_2$，然后对$A_2$ 的第 3 列作相应的初等逆变换：即右乘$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_1 \cdot \|b_1\|^{-1} \cdot \|b_2\|^{-1}$，则可得：

$$J_1 \to J_2 \to \begin{pmatrix} a_1 & \|b_1\| & & & & \\ \|b_1\| & a_2 & \|b_2\| & & & \\ & \|b_2\| & a_3 & \|b_2\| \cdot \|b_1\| b_1^{-1} b_2^{2} b_3 & & \\ & & \|b_2\|^{-1} \cdot \|b_1\|^{-1} b_3 b_2 b_1 & a_4 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & \bar{b}_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = J_3,$$

仿上法，再依次对每一次得到的矩阵J_i作初等行变换以及相应的列的逆变换，最后得到：

$$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \cdots \to \begin{pmatrix} a_1 & \|b_1\| & & & \\ \|b_1\| & a_2 & \|b_2\| & & \\ & \|b_2\| & a_3 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} & \|b_{n-1}\| \\ & & & \|b_{n-1}\| & a_n \end{pmatrix} = J_n,$$

由于J_i到J_{i+1}的初等变换均是对J_i作行变换，而后对得到的矩阵作相应的列的逆变换，故换成矩阵语言：即存在 $n \times m$ 初等阵P_i使$P_i^{-1} J_i P_i = J_{i+1}$； $i = 1, 2, \cdots, n-1$ ，由上面诸式即得：

$$P_{n-1}^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1} J_1 P_1 P_2 \cdots P_{n-1} , \qquad (4)$$

记$P = QP_1P_2\cdots P_{n-1}$ ，$r_i = \|b_i\|$；$i = 1, 2, \cdots, n$，则P 显然是Ω上的非异阵，且由（2）与（4）式即得（1）式.

i(ii) 如果$b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$ 中有某些为零，则（2）式中的J_1 显然可写成：

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{11} & & \\ & J_{12} & \\ & & \ddots \; J_{1s} \end{pmatrix},$$

而且每个J_{1i}为次对角线全是非零元的三对角阵，于是由（i）可知，存在非异阵Q_{1i}，使$Q_{1i}^{-1}J_{1i}Q_{1i}$ 是R上的形如（1）的同阶三对角阵，记

$$P=\begin{pmatrix} Q_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & Q_{1s} \end{pmatrix},$$

则P即为所求之非异阵，它使（1）式成立.

定义 设A是除环Ω上的$n\times n$阵，如果存在$\lambda\in\Omega$以及Ω上的n维非零列向量α，使
$$A\alpha=\lambda\alpha \quad (\text{或} A\alpha=\alpha\lambda),$$
则称λ为A的左（或右）时特值，而称α为A的（属于λ的）右（或左）特征向量。如果λ既是A的左特征值，又是A的右特征值，则称λ为A的特征值，而称α为A的（属于λ的）特征向量.

上述定义虽然对讨论Ω上方阵的酉相似是十分必要的，然而，在处理特征值本身的问题时却是相当复杂，因为在Ω上存在有无穷多个特征值的方阵．例如：对实四元数除环的中心R（实数域）上的方阵：
$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
以及满足$q^2=-1$的四元数$q=ai+bj+ck$，由于
$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q-1 \\ 1 \end{pmatrix}=q\begin{pmatrix} q-1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q-1 \\ 1 \end{pmatrix}q,$$
故知，即使R上的方阵A，它也可能有无穷多个特征值.

对强p除环上的自共轭阵，有如下特性，即

命题1 如果强p除环Ω上自共轭阵A有右有特征值λ，则$\lambda\in$R，因而λ是A的特征值.

证 由
$$A\alpha=\alpha\lambda,\ \alpha\neq 0, \tag{5}$$
可得
$$\bar{\alpha}'\bar{A}'=\bar{\lambda}\bar{\alpha}', \tag{6}$$
以$\bar{\alpha}'$左乘（5）式的两边，α右乘（6）式的两边，得到：
$$\bar{\alpha}'A\alpha=(\bar{\alpha}'\alpha)\lambda=N(\alpha)\lambda=\lambda N(\alpha),\quad \bar{\alpha}'\bar{A}'\alpha=\bar{\lambda}\bar{\alpha}'\alpha=\bar{\lambda}N(\alpha),$$
因为A是自共轭阵：$A=\bar{A}'$，故由上两式即得：
$$(\lambda-\bar{\lambda})N(\alpha)=0. \tag{7}$$
但$\alpha\neq 0$，故由正性条件可知，$N(\alpha)\neq 0$，于是由（7）式即可得$\lambda=\bar{\lambda}$，也就是$\lambda\in$**R**（$\subseteq$**Z**），因而λ是A的特征值.

命题1说明：对存在右特征值的自共轭阵来说，右特征值与特征值的概念是一致的．下列命题将说明，强p除环上的某些自共轭阵确实存在右特征值.

命题2 强p除环Ω上的$n\times n$镜象阵H至少有n个右特征值（即特征值），其中有$n-1$个是Ω的单位元e，另一个是$-e$．并且，A至少有n个n维特征向量$q_1,q_2,\cdots,q_n$使满足“正交条件”：
$$\bar{q}'_iq_j=\begin{cases} e, & (i=j) \\ 0, & (i\neq j) \end{cases};\ i,j=1,2,\cdots,n. \tag{8}$$

证：由［2］中的定理7，存在Ω上的$n\times n$酉阵Q，使
$$\bar{Q}'HQ=\begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$
将Q按它的列分块：$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，则由$\bar{Q}'Q=I_n$显然可得（8）式，并且（9）式可改写为：

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n)=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\begin{pmatrix}-e & & & \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ & & & e\end{pmatrix},$$

也即　$Hq_1=q_1(-e)$；$Hq_i=q_ie$，$i=2,3,\cdots,n$，为命题要证之结论.

关于强 p 除环上任一自共轭阵的特征值问题是相当复杂的，但对加强 p 除环上的自共轭阵却有如下良好的基本性质：

定理 2　加强 p 除环上的任一 $n\times n$ 自共轭阵 A 在R中至少有 n 个特征值.

证　由于加强 p 除环自然是强 p 除环，故由定理 1，存在Ω上非异阵 P，使

$$P^{-1}AP=J, \tag{10}$$

而 J 是元素取自R的三对角自共轭阵. 由于R⊆Z，故 J 也是Z上的自共轭阵. 因Ω是加强除环，故存在Ω的子域Σ，它是Z的代数封闭扩张（域），于是由域上方阵的特征值理论可知，存在 $\lambda_0\in\Sigma$，使 $f(\lambda_0)=\det(\lambda_0I_n-J)=0$，此处det 表示域上方阵 B 的行列式，而 $\det(\lambda I-B)$ 表示 B 的特征多项式. 又由于 J 是R上的方阵，故显然有：

$$f(\overline{\lambda_0})=\det(\overline{\lambda_0}I_n-J)=\overline{\det(\lambda_0I_n-J)}=\delta=0.$$

因Σ代数封闭，故 $\overline{\lambda_0}\in\Sigma$，于是存在Σ上的 n 维非零列向量 a，使

$$Ja=\lambda_0a, \tag{11}$$

由（11）式可得：　$$\bar a'\bar J'=\bar a'\bar\lambda_0=\bar\lambda_0\bar a' \tag{12}$$

再以 $\bar a'$ 左乘（11）式两边，以 a 右乘（12）式两边，可得Σ上的等式：

$$\bar a'Ja=\bar a'\lambda_0a=\lambda_0\bar a'a; \tag{13}$$

$$\bar a'J'a=\bar\lambda_0\bar a'a, \tag{14}$$

今因 $\bar J'=J$，$\bar a'a\neq0$（∵ $a\neq0$），故由（13）、（14）两式得到：$\lambda_0=\bar\lambda_0$，即 $\lambda_0\in$ R. 于是存在 $\lambda_0\in$ R，使 λ_0I_n-J 是奇异阵. 又因 λ_0（∈ R⊆Z）是中心元素，故由（10）式可得：

$$P^{-1}(\lambda_0I_n-A)=\lambda_0I_n-P^{-1}AP=\lambda_0I_n-J,$$

由于 λ_0I_n-J 是奇异阵，而 P 是非异阵，故知 λ_0I_n-A 是Ω上的非异阵，于是由除环上的右线性方程组理论[1]，存在Ω上 n 维非零列向量 β，使 $(\lambda_0I_n-A)\beta=0$，也即 $A\beta=\lambda_0\beta$，$\lambda_0\in$ R，又由于 $|\lambda I_n-J|$ 是Σ上的 n 次多项式，它在Σ上有 n 个根，故这种 λ_0 也有 n 个.

由定理 2 即可解决加强 p 除环上自共轭阵酉相似于对角阵的问题. 为此先证：

引理 1　设 A 是加强 p 除环Ω上的 $n\times n$ 奇异阵，则右齐次线性方程组 $Ax=0$ 必有一个非零解，它的第一个分量是R中形如 $N(a_1)$ 的元素.

证　设 $$a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$ 是 $Ax=0$ 的某一个非零解，则因 $$A\begin{bmatrix}a_1\bar a_1\\a_2\bar a_1\\\vdots\\a_na_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

故上述解向量的第一个分量为 $N(a_1)\in$ R.

定理 3　设 A 是加强 p 除环Ω上的 $n\times n$ 自共轭阵，则必存在Ω上的 $n\times n$ 酉阵 Q，使

$$\bar Q'AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}, \tag{15}$$

而 $\lambda_i\in$ R，并且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.

证 对n用归纳法．当$n=1$，定理显然正确．今对任意n，先证存在Ω上酉阵Q_1使

$$\bar{Q}_1' A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中$\lambda_1 \in R$是A的特征值，A是$(n-1)\times(n-1)$阵．

这是因为，由定理2，存在$\lambda_1\in R$，使λ_1是A的特征值，设β_1是A的属于λ_1的特征向量，

则 $$A\beta_1=\lambda_1\beta_1, \tag{17}$$

由引理1，不妨设β_1的第一个分量是$N(b_1)$，由于$\beta_1 \neq 0$，故由正性条件，$\|\beta_1\|\neq 0$，于是（17）式可改写为：$$A\beta_1\|\beta_1\|^{-1}=\lambda_1\beta_1\|\beta_1\|^{-1}, \tag{18}$$

易知$\beta_1\|\beta_1\|^{-1}$是单位列向量．又作单位列向量 $e_1=\begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则

（i）若$\beta_1\|\beta_1\|^{-1}=e_1$，则（18）式即是，$Ae_1=\lambda e_1$，也就是，

$$I_n A I_n=\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

（因A是自共轭阵，故打*号处全是零元）；

（ii）若$\beta_1\|\beta_1\|^{-1}\neq e_1$，则因$N(\beta_1\|\beta_1\|^{-1})=e=N(e_1)$；$\bar{\beta}_1' e_1=N(b_1)\in R$，故（由［2］的定理1．）存在镜象阵$H$，使 $$H\beta_1\|H\beta_1\|\beta_1\|^{-1}=e_1 \tag{19}$$

以$H=\bar{H}'$左乘（18）式两边，并由（19）式即得：

$$(\bar{H}'AH)e_1=(\bar{H}'AH)(H\beta_1\|\beta_1\|^{-1})=\bar{H}'(\lambda_1\beta_1\|\beta_1\|^{-1})=\lambda_1(\bar{H}'\beta_1\|\beta_1\|^{-1})=\lambda_1 e_1,$$

也即 $\bar{H}'AH=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$，所以由（i）与（ii）可知，（16）式是正确的．

由于A_1显然是$(n-1)\times(n-1)$自共轭阵，故由归纳法假设，存在Ω上的$(n-1)\times(n-1)$酉阵Q_2，使

$$\bar{Q}_2' A_1 Q_2=\begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \lambda_3 & \\ & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{20}$$

而$\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n(\in R)$是$A_1$的$n-1$个特征值．作酉阵，$Q=Q_1\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$，，由（16）式与（20）式即得（15）式．

今将（15）式中的Q按它的列分块：$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n,)$，则（15）式显然可化为：

$$Aq_i=q_i\lambda_i=\lambda_i q_i;\quad q_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

故$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全是$A$的特征值．

定理3的一个有趣的应用是下面的

定理4 设Ω是加强P除环，且满足：$$\omega\cdot\bar{\omega}=\bar{\omega}\cdot\omega,\ \forall\,\omega\in\Omega, \tag{21}$$

（例如四元数除环就具有性质（21））．又设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是Ω上$n\times n$自共轭阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征值，则必

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}N(a_{ij}), \tag{23}$$

证　由定理3，将（15）式改写为：

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中Q是Ω上$n\times n$酉阵．记$Q=(q_{ij})_{n\times n}$，则比较$\overline{Q}'Q=I_n$的两边的第l行、l列的元素，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{q}_{il}q_{il}=e;\quad l=1,2,\cdots,n,$$

由假设（21），上式可改写为：$\sum_{i=1}^{n}q_{il}\overline{q}_{il}=e;\quad l=1,2,\cdots,n,$ (25)

另一方面，由（24）式可得：

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n}q_{ik}\Big(\sum_{l=1}^{n}(\lambda_k\delta_{kl})\overline{q}_{jl}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}q_{ik}\lambda_k\delta_{kl}\overline{q}_{jl}\Big), \tag{26}$$

此处$\delta_{ii}=e$，$\delta_{ij}=0$（$i\neq j$）．由于Ω的加群是交换群，且$\lambda_k\in\mathbf{R}$，故（26）式可改写为：

$$a_{ii}=\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k q_{ik}\delta_{kl}\overline{q}_{il}\Big)=\sum_{l=1}^{n}\lambda_l q_{il}\overline{q}_{il},$$

于是由上式及（25）式即得：

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{l=1}^{n}\lambda_l q_{il}\overline{q}_{il}\Big)=\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\Big(\sum_{i=1}^{n}q_{il}\overline{q}_{il}\Big)=\sum_{l=1}^{n}\lambda_l.$$

又由（15）式显然可得：

$$\overline{Q}'A\overline{A}'Q=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2\end{pmatrix}, \tag{27}$$

而$A\overline{A}'$的(i,i)主对角元为：$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}N(a_{ij})$，故由（27）式并应用（22）式的结论即得（23）式．

我们曾用定理4得到了判断四元数除环上任意方阵是非异阵的一个有趣结论．[3]

定理5　设A是加强p除环Ω上的$n\times n$正定自共轭阵，则必存在Ω上的$n\times n$酉阵Q，使得：

$$\overline{Q}'AQ=\begin{pmatrix}\|a_1\|^2 & & & \\ & \|a_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|^2\end{pmatrix} \tag{28}$$

而$\|a_i\|\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$．

反之，对Ω上的$n\times n$阵A，若存在Ω上酉阵Q，使成立（28）式，则A必是正定自共轭阵．

证　对自共轭阵A，成立（15）式．今因A是正定的，故由推广的Cholesky分解：$A=\overline{U}'U$，此处U是Ω上的非异上三角阵（［2］的定理4），可得：

$$\overline{Q}'\overline{U}'UQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{29}$$

设UQ的第i列为a_i，则由（29）式显然可知：

$$\lambda_i=\overline{a}_i'a_i=N(a_i)=\|a_i\|^2,\ i=1,2,\cdots,n,$$

且由UQ的非异性可知a_i是非零向量，因而$\|a_i\|\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n$.

反之，若成立（28）式，则可得，

$$A=\left\{\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}Q\right\}'\left\{\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}Q\right\}$$

这说明A是正定自共轭阵.

应用定理5可以证明，关于复数域上的正定自共轭阵的一系列基本结论，对加强P除环Ω上的正定自共轭阵几乎都成立，今述其若干主要者如下：

定理6 加强P除环Ω上的任一$n\times n$非异阵必有分解式：

$$A=P\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}\overline{Q}', \tag{30}$$

其中$\|a_i\|\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n$，而P与Q都是Ω上$n\times n$酉阵.

证：因为$\overline{A}'A$是正定自共轭阵，故由定理5，存在酉阵Q，使

$$\overline{Q}'\overline{A}'AQ=\begin{pmatrix}\|a_1\|^2 & & \\ & \|a_2\|^2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|^2\end{pmatrix}, \tag{31}$$

其中$\|a_1\|^2,\cdots,\|a_n\|^2$是$\overline{A}'A$的特征值，且$\|a_i\|\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n$.记

$$P=AQ\begin{pmatrix}\|a_1\|^{-1} & & \\ & \|a_2\|^{-1} & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|^{-1}\end{pmatrix},$$

则因$\|a_i\|\in\mathrm{R}$；$i=1,2,\cdots,n$，故由（31）式可知，P是酉阵，且成立（30）式.

定理7 加强P除环上任何非奇异阵A必有分解式：

$$A=S_1V=VS_2, \tag{32}$$

其中S_1与S_2都是Ω上非奇异自共轭阵，而V是Ω上的酉阵.

证：由（30）式可得

$$A=P\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}\overline{P}'\cdot(P\overline{Q}')=(P\overline{Q}')\cdot Q\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}\overline{Q}',$$

易知$V=P\overline{Q}'$是酉阵，而

$$S_1=P\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}\overline{P}',\qquad S_2=Q\begin{pmatrix}\|a_1\| & & \\ & \|a_2\| & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_n\|\end{pmatrix}\overline{Q}'$$

都是非奇异自共轭阵.

定理8 加强P除环Ω上的任何秩为r的$m\times n$阵A必有分解式：

$$A=P\begin{pmatrix}\|a_1\| & & & & & \\ & \|a_2\| & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \|a_r\| & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}\overline{W'}\quad, \tag{33}$$

其中P与W分别是Ω上的$m\times m$酉阵与$n\times n$酉阵，而$\|a_i\|^2=N(a_i)\neq 0$是$A\overline{A'}$与$\overline{A'}A$的公共特征值；$i=1,2,\cdots,r$.

证 在［2］中§2的（10）式有分解式：

$$A=Q\begin{pmatrix}N & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\overline{V'}\ , \tag{34}$$

而Q、V都是酉阵，N是$r\times r$非异阵．由定理6，存在$r\times r$酉阵P_1与P_2，以及$\|a_i\|\neq 0$ $i=1,2,\cdots,r$，使成立：

$$N=P_1\begin{pmatrix}\|a_1\| & & & \\ & \|a_2\| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \|a_r\|\end{pmatrix}\overline{P}_2'\quad, \tag{35}$$

将（35）式代入（34）式，即

$$A=Q\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|a_1\| & & & & & \\ & \|a_2\| & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \|a_n\| & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{P_2'} & O\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}\overline{V'}\ , \tag{36}$$

易知 $P=Q\begin{pmatrix}P_1 & O\\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}$，$W=V\begin{pmatrix}P_2 & O\\ O & I_{n-r}\end{pmatrix}$

都是酉阵，故（36）式即（33）式．再由（33）式可得：

$$\overline{P}'A\overline{A}'P=\begin{pmatrix}N(a_1) & & & & & \\ & N(a_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & N(a_r) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix},\quad \overline{W}'\overline{A}'AW=\begin{pmatrix}N(a_1) & & & & & \\ & N(a_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & N(a_r) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix} \tag{37}$$

由上两式即易知$N(a_1),\cdots,N(a_r)$是$A\overline{A}'$的非零公共特征值．

定义 加强p除环Ω上的秩为r的$n\times n$自共轭阵A称为半正定阵，如果$A=\bar{B}'B$，而B是秩为r的$m\times n$阵．

由上面的定义及（37）式显然可得．

定理9 设A是加强p除环Ω上的$n\times n$半正定自共轭阵，则必存在Ω上酉阵Q，使

$$\bar{Q}'AQ=\begin{pmatrix}\|a_1\|^2 & & & & & \\ & \|a_2\|^2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \|a_r\|^2 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{pmatrix} \tag{38}$$

其中 $\|a_1\|^2$，$\|a_2\|^2$，…，$\|a_r\|^2$ 是 A 的非零特征值．

若记 $$P=Q\begin{pmatrix}\|a_1\|^{-1} & & & & & \\ & \|a_2\|^{-1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \|a_r\|^{-1} & & \\ & & & & e & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & e\end{pmatrix},$$

则 P 是非异阵，且由（38）式显然可得：

定理 10 设 A 是加强 p 除环 Ω 上的秩为 r 的半正定自共轭阵，则必存在 Ω 上的非异阵 P，使
$$\overline{P}'AP=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{39}$$

若将上述 P 的逆 P^{-1} 分块：$P^{-1}=\begin{array}{c}r\\ n-r\end{array}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}$，

则 B 是秩为 $r\times n$ 阵．于是由（39）式并经过简单的计算，即可得：

定理 11 加强 p 除环上秩为 r 的 $n\times n$ 半正定自共轭阵 A 必有分解式：
$$A=\overline{B}'B, \tag{40}$$
其中 B 是秩为 r 的 $r\times n$ 阵．

定理 12 加强 p 除环 Ω 上两个可交换的正定自共轭阵 A 与 B 的乘积仍是正定自共轭阵．

证 事实上，可证下述更一般的结论：

"若 A 与 B 都是 Ω 上 $n\times n$ 自共轭阵，且 $AB=BA$，则必存在 Ω 上酉阵 Q，使
$$\overline{Q}'AQ=\begin{pmatrix}\tau_1 & & \\ & \tau_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \tau_n\end{pmatrix};\quad \overline{Q}'BQ=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \mu_1 & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}; \tag{41}$$
其中 τ_i，$\mu_j\in\mathrm{R}$；i，$j=1,2,\cdots,n$．

这是因为，由定理 3，存在 $n\times n$ 酉阵 P_1，使成立：
$$\overline{P}_1'AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}, \tag{42}$$
设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有 s 个不同的元素，且（不妨）设 λ_i 共有 n_i 个；$i=1,2,\cdots,s$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}n_i=n$

今适当地同时调动（42）中 λ_i 所在的行与列的次序，即找出酉阵 P_2 使
$$\overline{P}_2'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P_2=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{n_1} & & \\ & \lambda_2I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_sI_{n_s}\end{pmatrix}, \tag{43}$$
令 $P_1P_2=Q_1$，于是 Q_1 是酉阵，且由（42）与（43）两式即得：
$$\overline{Q}_1'AQ_1=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{n_1} & & \\ & \lambda_2I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_sI_{n_s}\end{pmatrix}, \tag{44}$$
又由假设 $AB=BA$ 可得：
$$(\overline{Q}_1'AQ_1)(\overline{Q}_1'BQ_1)=(\overline{Q}_1'BQ_1)(\overline{Q}_1'AQ_1), \tag{45}$$

若把$\bar{Q}_1'BQ_1$按（44）式右端的分块法相应地分块如下：

$$\bar{Q}_1'BQ_1=\begin{pmatrix} B_{11}\cdots B_{1s} \\ \cdots\cdots \\ B_{s1}\cdots B_{ss}\end{pmatrix},$$

其中B_{ii}是$n_i\times n_i$阵：$i=1,2,\cdots,s$，则由（44）式与（45）式易知成立：$B_{ij}=0$，$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,s$，故

$$\bar{Q}_1'BQ_1=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{ss}\end{pmatrix},\tag{46}$$

由于$\bar{Q}'_1BQ_1$是自共轭阵，故B_{ii}全是自共轭阵；$i=1,2,\cdots,s$，于是再用定理3，存在$n_i\times n_i$酉阵R_i，$i=1,2,\cdots,s$，使 $\bar{R}_1'B_{11}R_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n_1}\end{pmatrix}$，

$$\bar{R}_2'B_{22}R_2=\begin{pmatrix}\mu_{n_1+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n_1+n_2}\end{pmatrix},\cdots,\bar{R}_s'B_{ss}R_s=\begin{pmatrix}\mu_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix},\tag{47}$$

若记 $\tau_1=\cdots=\tau_{n_1}=\lambda_1$；$\tau_{n_1+1}=\cdots=\tau_{n_1+n_2}=\lambda_2$；$\cdots$；$\tau_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}=\cdots=\tau_n=\tau_n=\lambda_s$，

$$Q=Q_1\begin{pmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_s\end{pmatrix},$$

则Q仍是酉阵，且由（44）式、（46）式以及（47）的诸式即得（41）的两个式子.

由（41）式即得：

$$\bar{Q}'ABQ=\begin{pmatrix}\tau_1\mu_1 & & & \\ & \tau_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_n\mu_n\end{pmatrix},\tag{48}$$

由于A与B是可交换的自共轭阵，故易知AB也是自共轭阵，当A与B都是正定自共轭阵时，由定理5的必要性可知：

$$\tau_i=\|\alpha_i\|^2；\ \mu_i=\|\beta_i\|^2,\ i=1,2,\cdots,n,$$

于是 $\tau_i\mu_i=\|\alpha_i\|^2\cdot\|\beta_i\|^2=(\|\alpha_i\|\cdot\|\beta_i\|)(\overline{\|\alpha_i\|\cdot\|\beta_i\|})=\|(\|\alpha_i\|\cdot\|\beta_i\|)\|^2$；$i=1,2,\cdots,n$，再由（48）式以及定理5的充分性即知，$AB$是正定自共轭阵.

定理13 设A与B分别是加强P除环Ω上的$n\times n$自共轭阵与$n\times n$正定自共轭阵，则必存在Ω上的$n\times n$非奇异阵P，使

$$\bar{P}'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}；\ \bar{P}'BP=I_n,\tag{49}$$

其中$\lambda_i\in\mathrm{R}$，$i=1,2,\cdots,n$.

证 设$B=\bar{U}'U$是B的Cholesky分解（［2］的定理4），此处U是Ω上的非异阵三角阵，则 $U B\bar{U}'=I_n$， (50)

因$A\bar{U}'$仍是自共轭阵，故由定理3，存在酉阵Q，使

$$\bar{Q}'UA\bar{U}'Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{51}$$

此处λ_1 λ_2, …, λ_n是$UA\bar{U}'$的特征值，且$\lambda_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$. 显然可将（50）式化为：

$$\bar{Q}'UB\bar{U}'Q=I_n \tag{52}$$

记：$P=\bar{U}'Q$，则P是Ω上的非异阵，且由（51）式与（52）式即得（49）式的两个式子.

加强p除环Ω上任一$n\times n$阵能否酉相似于一个形状比上Hessenberg阵更简单的矩阵？又、如何借助酉相似的理论建立起加强p除环上可中心化阵的行列式理论？这些将在继文中加以讨论.

参 考 文 献

[1] N.Jacobson，抽象代数学，卷2，线性代数，黄缘芳译.（1960）科学出版社.

[2] 屠伯埙，强p除环上方阵的酉相似理论—（Ⅰ），数学研究与评论，Vol.7（1987），No.3，393—404.

[3] 屠伯埙，四元数体上方阵非异性的判定，复旦学报（自然科学版），27：2（1988）.

Unitary Similarity Theory of Matrices over the Strong p—Division Ring（Ⅱ）

Tu Boxun

（Fudan University）

Abstract

This is a continuation of the previous paper（Ⅰ）. In this paper, a useful basic theorem that every selfconjugate matrix over the strong p division ring Ω is unitary similar to a tridiagonal matrix over the conter of Ω is given thus all of famous results involving selfconjugate matrices, positivedefinite selfconjugate matrices, nonnegative selfconjugate matrix in the ordinary complex matrix theory are generalized to selfconjugate matrices over Ω, and Singular decomuposition as well as polar decomposition in the ordinary complex matrix theory are also generalized to matrices over Ω.