一类新的Block空间及其应用*

施 咸 亮

（杭州大学）

我们将引入一类新的Block空间并把它应用于奇异积分理论．首先引入一些记号和定义．设S^{n-1}是n维欧空间R^n中的$n-1$维单位球面，当$n\geq 2$时，以$B(x,r)$表示S^{n-1}中以x为中心，r为半径的球：$B(x,r)=\{y\in S^{n-1}:\ |x-y|\leq r\}$．以$\rho$表示$R^n$中绕原点的旋转，$|\rho|$表示它的模，即$|\rho|=|x-\rho x|$，其中$|x|=1$．设$K(x)=\Omega(x)/|x|^n$是$R^n\setminus\{0\}$上局部可积函数，$\Omega(x)$是正性齐次且满足消失条件$\int_{S^{n-1}}\Omega(x)d\sigma(x)=0$的函数，其中$d\sigma(x)$表示$S^{n-1}$上的Lebesgue测度．又设$b(x)$是有界的径向函数，$H(x)=b(x)K(x)$．考虑算子

$$Tf(x)=\mathrm{p.v.}H*f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x-y|>\varepsilon}H(x-y)f(y)dy.$$

R.Fefferman［1］证明，若$n\geq 2$且Ω的连续模$\omega(\Omega,t)=\sup_{|x|=1,|\rho|<t}|\Omega(t)-\Omega(\rho x)|$满足Dini条件

$$\int_0^1\frac{\omega(\Omega,t)}{t}dt<\infty,\tag{1}$$

那么算子$T\in(L^2,L^2)$．又若存在$\eta>0$使

$$\int_0^1\frac{\omega(\Omega,t)}{t^{1+\eta}}dt<\infty,\tag{2}$$

那么$T\in(L^p,L^p)$，$1<p<\infty$．这个结果被J·Namazi[2]和作者[3]改进．J·Namazi在〔2〕中指出，若$n\geq 2$，$\Omega(x)\in L^q(S^{n-1})$，$1<q\leq\infty$，那么$T\in(L^p,L^p)$，$1<p<\infty$．作者在〔3〕中指出，R·Fefferman的定理中条件（1）和（2）内的连续模$\omega(\Omega,t)$可被积分连续模$\omega_1(\Omega,t)$代替，其中

$$\omega_p(\Omega,t)=\sup_{|\rho|\leq t}\left\{\int_{S^{n-1}}|\Omega(x)-\Omega(\rho x)|^p d\sigma(x)\right\}^{1/p}.$$

在〔4〕中作者又证明，若$n\geq 2$，$\Omega(x)\in J^0(S^{n-1})$，那么$T\in(L^2,L^2)$．又若存在$0<\beta<1$使$\Omega(x)\in J^\beta(S^{n-1})$那么$T\in(L^p,L^p)$，$1<p<\infty$．

这里$J^\beta(S^{n-1})$是β熵空间．对于$\beta=0,n=2$，它是R·Fefferman〔5〕引入的，一般情况定义如下（见作者〔4〕）：设$\lambda>0,\Omega(x)\in L^1(S^{n-1})$．记$E_\lambda=\{x\in S^{n-1}:\ |\Omega(x)|>\lambda\}$．作一列球$\{B_l\}_{l=1}^\infty$复盖$E_\lambda$且使$d_l=\mathrm{diam}(B_l)\leq 1/2$．记$\psi_\beta(t)=\int_t^1\frac{dt}{t^{1+\beta}}$（$0\leq\beta<1$）．定义函数$g(\Omega,\beta;\lambda)=\inf\Sigma_l|B_l|\psi_\beta(d_l)$，其中$|B_l|$表示$B_l$的$n-1$维测度，inf取遍一切可能的复盖．称

* 1987年1月9日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

积分$e_\beta(\Omega)=\int_0^\infty g(\Omega,\beta;\lambda)\mathrm{d}\lambda$ 为函数$\Omega(x)$ 的β-熵．满足 $\|\Omega\|_{J^\beta(S^{n-1})}=e_\beta(\Omega)<\infty$的函数$\Omega$全体称为$\beta$-熵空间．记作$J^\beta(S^{n-1})$．在范数 $\|\cdot\|_{J^\beta(S^{n-1})}$下$J^\beta(S^{n-1})$ 构成完备空间．

M H.Taibleson 和G.Weiss [6] 为了研究Fourier 级数的几乎处处收敛性引入了比熵空间更广的Block空间．设$1<q\leqslant\infty$．称S^{n-1}上满足

$$\|g\|_q=\left\{\int_{S^{n-1}}|g(x)|^q\mathrm{d}\sigma(x)\right\}^{1/q}\leqslant|B|^{\frac{1}{q}-1}$$

的函数$g(x)$是一个q-Block，其中B是包含supp $g(x)$的球．Block空间$BL_q(S^{n-1})$由这样的函数$\Omega(x)$组成：$\Omega(x)=\sum m_k b_k(x)$， 其中$b_k(x)$是$q$-Block 且$m=\{m_k\}$ 满足

$$N(m)=\sum_{k=1}^\infty|m_k|\left(1+\log\frac{\sum_{l=1}^\infty|m_l|}{|m_k|}\right)<\infty.$$

这里，当$m_k=0$时第k个加项取值零．在此空间中赋以“范数”$\|\Omega\|_{BL_q(S^{n-1})}=\inf\left\{N(m):\Omega=\sum m_k b_k\right\}$ 则$BL_q(S^{n-1})$构成完备空间.我们构造反例指出，$\Omega(x)\in BL_q(S^{n-1})$ 未必能保证算子T的$L^p(R^n)$ 有界性，$1<p<\infty$．因此，我们希望能构造一类新的Block 空间，使得它能与$BL_q(S^{n-1})$ 一样，既包含熵空间又包含$L^q(S^{n-1})$，另一方面却又蕴含算子T的$L^p(R^n)$有界性．下面叙述新空间的定义．

空间$Bl_{(\beta,q)}(S^{n-1})$由S^{n-1}上这样的函数$\Omega(x)$ 组成：$\Omega(x)=\sum m_k b_k(x)$,其中supp $b_k\subset B_k$，B_k是S^{n-1}上的球，$\|b_k\|_{L^q(S^{n-1})}\leqslant|B_k|^{\frac{1}{q}-1}$且记$d_k=\operatorname{diam}(B_k)$ 的话

$$M(m)=\sum|m_k|\psi_\beta\left(\frac{d_k}{1}\right) .$$

在此空间中赋以范数 $\|\Omega\|_{Bl_{(\beta,q)}(S^{n-1})}=\inf M(m)$，其中下界取遍一切可能的级数展开，那么$Bl_{(\beta,q)}(S^{n-1})$构成Banach空间．

我们证明了下述嵌入定理

定理 1 设$n\geqslant2,0<\beta<1$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$，那么有下列嵌入关系：

$$\begin{array}{l}B^\beta_{p,1}(S^{n-1})\to J^\beta(S^{n-1})\\ \qquad L^q(S^{n-1})\end{array}\rightrightarrows Bl_{(\beta,q)}(S^{n-1}).$$

这里$B^\beta_{p,1}(S^{n-1})$是S^{n-1}上的Besov空间，定义如下：设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$\theta\geqslant1$，$0\leqslant\beta\leqslant1$，那么空间$B^\beta_{p,\theta}(S^{n-1})$ 由S^{n-1}上满足

$$\|\Omega\|_{B^\beta_{p,\theta}(S^{n-1})}=\|\Omega\|_{L^p(S^{n-1})}+\left(\int_0^1\frac{\omega_p(\Omega,t)}{t^{1+\beta\theta}}\mathrm{d}t\right)^{1/\theta}<\infty.$$

的函数Ω全体组成．

关于算子T我们证明了下述的

定理 2 设$n\geqslant2$，$1<q\leqslant\infty$，$\Omega(x)\in Bl_{0,q}(S^{n-1})$，那么算子$T\in(L^2,L^2)$．

系 设$n\geqslant2,1<q\leqslant\infty,0<\beta<1,1<p<\infty$．若$\Omega(x)\in Bl_{(\beta,q)}(S^{n-1})$，则$T\in(L^p,L^p)$．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

参 考 文 献

〔1〕R·Fefferman, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 266—270.
〔2〕J·Namazi, Proc. Amer. Math. Soc.. 96(1986), 421—424.
〔3〕Xian Liang Shi(施咸亮), Indiana Vniv. Math. J 35(1)(1986), 103—116.
〔4〕施咸亮，一个奇异积分算子（待发表）.
〔5〕R·Fefferman, Adv. in Math., 30(3)(1978), 171—201.
〔6〕M.H.Taibleson and G.Weiss, in "Proc. of the Conf. on Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmand, Vol.1", 95—13 (1982).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.