# 正实部解析函数的渐近性质*

潘一飞

（江西师范大学，南昌）

## 一 引言

令$\mathscr{P}$表示$P(z)$在U：$|z|<1$内正则$P(0)=1$，且$\mathrm{Re}P(z)>0$的函数全体．$\mathscr{P}$中两函数$P_1$，$P_2$的Hadamard乘积定义为

$$(P_1 * P_2)(z)=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)}c_n^{(2)}z^n$$

其中 $P_i(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}z^n\in\mathscr{P}$．记$\overline{P}(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{c}_nz^n$．

本文主要研究$P(z)$的渐近性质，最后说明其在单叶函数论中的应用．

## 二 几条引理

**引理1**[1]（Hardy-Littlewood）．设$\varphi(x)=\sum a_nx^n$，$a_n\geq 0$且$\varphi(x)\sim\frac{c}{1-x}(x\to 1-0)$则

$$\sum_{n=1}^{N}a_n\sim cN(N\to\infty)$$

**引理2**[2] $P(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\in\mathscr{P}$充要条件是$P(z)$系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \bar{c}_1 & a & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & & 2 \end{pmatrix}(n=1、2\cdots)$$是正定的．

**引理3**[3]若$P_j(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(j)}z^n\in\mathscr{P}$则$P_1*P_2\in\mathscr{P}$．

**引理4**[4]（Julia）设$\varphi(z)$在U正则且$|\varphi(z)|<1$，$\varphi(r)\to 1(r\to 1)$

当$\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\to\beta\neq\infty$有$\frac{|1-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\leq\beta\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}$　$z\in\mathrm{U}$（*）

## 三 主要定理

**定理1**　（i）设$P(z)\in\mathscr{P}$．则$\mathrm{I}(r)=\frac{1-r}{1+r}|P(re^{i\theta})|$为$r$的单调减少函数$r\in(0,1)$（$\theta$固定）

（ii）$J(r)=\frac{1-r}{1+r}\max_{|z|=r}|P(z)|$同样为$r\in(0,1)$单调减少函数

*1981年3月2日收到

$a_P=\lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}\max\limits_{|z|=r}|P(z)|\leq 1$.

(iii) 存在$\theta_0\in[0,2\pi]$ 使得$a_P=\lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}|P(re^{i\theta_0})|$.

证明(i) 由于$P(z)\in\mathscr{P}$则有不等式([2],P169(27)) $|P'(z)|\leq\frac{2}{1-r^2}\mathrm{Re}P(z)$,有

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right|\leq\left|\frac{P'(z)}{\mathrm{Re}P(z)}\right|\leq\frac{2}{1-r^2}.$$

由此即得

$$\frac{\partial}{\partial r}\log I(r)=\frac{\partial}{\partial r}\log\frac{1-r}{1+r}+\frac{\partial}{\partial r}\log|P(re^{i\theta})|=\mathrm{Re}e^{i\theta}\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}-\frac{2}{1-r^2}$$
$$\leq\left|\frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})}\right|-\frac{2}{1-r^2}\leq 0.$$

这说明$I(r)$为$r\in(0,1)$的单调减少函数.

(ii) 现设$r_1<r_2$,$\theta_0\in(0,2\pi]$,使得$\max\limits_{|z|=r_2}|P(z)|=|P(r_2e^{i\theta_0})|$.

由$I(r)$单调减少性,

$$\max_{|z|=r_1}|P(z)|\frac{1-r_1}{1+r_2}\geq|P(r_1e^{i\theta_0})|\frac{1-r_1}{1+r_1}\geq|P(r_2e^{i\theta_0})|\frac{1-r_2}{1+r_2}=\max_{|z|=r_2}|P(z)|\cdot\frac{1-r_2}{1+r_2}.$$

这说明$J(r)$为$r$的单调减少函数. 又由于$|P(z)|\leq\frac{1+r}{1-r}$. 当然$J(r)$当$r\to 1$极限存在且不超过1.

(iii) 任取$r_n$: $r_n\to 1$, 又取$\theta_n$,使得$\max\limits_{|z|=r_n}|P(z)|=|P(r_ne^{i\theta_n})|$. 由(ii)极限$\lim\limits_{r_n\to 1}\frac{1-r_n}{1+r_n}|P(r_ne^{i\theta_n})|=a_P$存在. 对固定$r\in(0,1)$与充分大的$n$, 有

$$|P(re^{i\theta_n})|\frac{1-r}{1+r}\geq|P(r_ne^{i\theta_n})|\frac{1-r_n}{1+r_n}.$$

设$\theta_0$为$\theta_n$的一个极限点: $\theta_{n_k}\to\theta_0(k\to\infty)$,在上不等式中令$k\to\infty$有$|P(re^{i\theta_0})|\frac{1-r}{1+r}\geq a_P$. 由于

$$\frac{1-r}{1+r}\max_{|z|=r}|P(z)|\geq|P(re^{i\theta_0})|\frac{1-r}{1+r}\geq a_P$$

令$r\to 1$, 则有$\lim\limits_{r\to 1}|P(re^{i\theta_0})|\frac{1-r}{1+r}=a_P$.

定理1使我们对函数类$\mathscr{P}$引入一个指数:

**定义** 设$P(z)\in\mathscr{P}$. 由定理1, $a_P=\lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}\max\limits_{|z|=r}|P(z)|$且小于等于1. 称$a_P$为$P(z)$的最大增长指数.

熟知若$P(z)=1+\sum c_nz^n\in\mathscr{P}$则$|c_n|\leq 2$. 若$P(z)$最大增长指数$a_P>0$, 则$a_P$与与$c_n$有何关系呢? 下面给出回答.

**定理2** 设$P(z)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n\in\mathscr{P}$且$a_P>0$则$|c_n-2a_Pe^{-in\theta_0}|\leq 2(1-a_P)$, 其中

$\theta_0$ 为定理 1 中使 $a_P=\lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}|P(re^{i\theta_0})|$ 成立的 $\theta_0$。

**证明** 不妨设 $\theta_0=0$，否则考虑 $P(ze^{-i\theta_0})\in\mathscr{P}$。由于 $a_p=\lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r}{1+r}|P(r)|>0$ 则 $P(r)\to\infty(r\to 1)$ 令 $\varphi(z)=\frac{P(z)-1}{P(z)+1}$ 则 $\varphi(z)$ 在U正则且 $|\varphi(z)|<1$，$\varphi(r)=\frac{P(r)-1}{P(r)+1}\to 1(r\to 1$。由引理 4，$\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\to\beta\neq 0$ 且 $\frac{1}{\beta}\frac{|1-|z|^2}{|1-z|^2}\leq\frac{1-|\varphi|^2}{|1-\varphi|^2}$，$z\in$U. 但是 $\left|\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\right|=\frac{2}{(1-r)|P(r)+1|}\to\frac{1}{a_P}$，因此 $\beta=a_P^{-1}$，不等式（*）等价于

$$\operatorname{Re}P(z)\geq a_P\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z}\ \text{即}\ \operatorname{Re}\left(P(z)-a_P\frac{1+z}{1-z}\right)\geq 0.$$

而 $P(z)-a\frac{1+z}{1-z}=1-a_P+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-2a_P)z^n$，因此 $|c_n-2a_P|\leq 2(1-a_P)$。

定理 2 对极值问题是有用的，如

**推论 1** $a_P=1\Leftrightarrow P(z)=\frac{1+e^{-i\theta_0}z}{1-e^{-i\theta_0}z}$，其中 $a_P=\lim\frac{1-r}{1+r}|P(re^{i\theta_0})|$。$P\in\mathscr{P}$。

下面讨论 $\mathscr{P}$ 函数最大增长指数 $a_P$ 的性质

**定理3** 对任 $P(z)\in\mathscr{P}$ 有 $a_P^2\leq a_{P\cdot\overline{P}}\leq a_P$，且存在 $P_0(z)\in\mathscr{P}$ 使得 $a_P^2\neq a_{P\cdot\overline{P}}$。

**证明** 由引理 2 知若 $P(z)\in\mathscr{P}$ 则 $\overline{P}(z)\in\mathscr{P}$，由引理 3 知 $P*P(z)\in\mathscr{P}$，正实部函数积分表示

$$P(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z}\mathrm{d}\mu(t),$$

其中 $\mu(t)$ 为某个概率测度．设 $P(z)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nz^n$，则 $c_k=2\int_0^{2\pi}e^{ik+}\mathrm{d}\mu(t)$，

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_k|^2r^k=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum c_kr^k\bar{c}_k=\operatorname{Re}\left(\sum c_kr^k\int_0^{2\pi}e^{kti}\mathrm{d}\mu(t)\right)$$

$$=\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\left(\sum_0^{\infty}c_kr^ke^{ikt}\right)d\mu(t)=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(\sum_1^{\infty}c_kr^ke^{ikt}\right)\mathrm{d}\mu(t),$$

$$1+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_k|^2r^k=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\left(1+\sum_1^{\infty}c_kr^ke^{ikt}\right)\mathrm{d}\mu(t)$$

$$=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}P(re^{it})\mathrm{d}\mu(t)\leq\operatorname{Max}\operatorname{Re}P(re^{it})\leq\max_{|z|=r}|P(z)|.$$

所以 $\frac{1-r}{1+r}\left(1+\frac{1}{2}\sum\limits_1^{\infty}|c_k|^2r^k\right)\leq\frac{1-r}{1+r}\max\limits_{|z|=r}|P(z)|$。虽然 $1+\frac{1}{2}\sum\limits_1^{\infty}|c_k|^2r^k=$ $P*\overline{P}(r)=\max\limits_{|z|=r}|P*\overline{P}(z)|$。在上列不等式中令 $r\to 1$，则 $a_{P\cdot\overline{P}}\leq a_P$。下证 $a_P^2\leq a_{P\cdot\overline{P}}$。用Cauchy 不等式，

$$\max_{|z|=r}|P(re^{i\theta})|)^2\leq\left(1+\sum_1^{\infty}|c_n|r^n\right)^2\leq\left(1+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_n|^2r^n\right)\left(1+2\sum_1^{\infty}r^n\right)$$

$$\frac{1+r}{1-r}\left(1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2r^n\right).$$

所以 $\left[\frac{1-r}{1+r}\max_{|z|=r}|P(z)|\right]^2\leq\frac{1-r}{1+r}\left(1+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_n|^2r^n\right)$.

令 $r\to1$，$a_P^2\leq a_{P*\overline{P}}$.

取 $P_0(z)=\frac{1+z^2}{1-z^2}$. $a_{P_0}=a_{P_0*\overline{P}_0}=\frac{1}{2}$.

**定理 4** 对任何 $P_1,P_2\in\mathscr{P}$. 则 $a_{P_1*P_2}\leq\min(a_{P_1},a_{P_2})$.

**证明** 不妨设 $a_{P_2}\leq a_{P_1}$. 又 $P(z)=1+\sum c_n^{(i)}z^n$，则 $c_k^{(1)}=2\int_0^{2\pi}e^{ikt}\mathrm{d}\mu(t)$，

$$P_1*P_2=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(1)}c_k^{(2)}r^ke^{i\theta k}=1+\sum r^kc_k^{(2)}\int_0^{2\pi}\overline{e}^{ik(t-\theta)}\mathrm{d}\mu(t)=\int_0^{2\pi}\Big(1+$$

$$\sum_1^{\infty}c_k^{(2)}r^k\overline{e}^{ik(t-\theta)}\Big)\mathrm{d}\mu(t)=\int_0^{2\pi}P_2(r_2e^{i(t-\theta)})\mathrm{d}\mu(t).$$

因此 $|P_1*P_2|\leq\int_0^{2\pi}|P_2(re^{i(t-\theta)})|\mathrm{d}\mu(t)\leq\max_{|z|=r}|P(z)|$，

$$\frac{1-r}{1+r}\max|P_1*P_2|\leq\frac{1-r}{1+r}\max|P_2(z)|.$$

令 $r\to1$，则 $a_{P_1*P_2}\leq a_{P_2}=\min(a_{P_1},a_{P_2})$.

**推论 2** 若 $P_0(z)\in\mathscr{P}$ 使得 $a_{P_0}=0$ 则对任何 $P\in\mathscr{P}$ 恒有 $P_0*P=0$.

设 $P_1P_2\cdots\cdots\in\mathscr{P}$ 一系列函数，$a^{(n)}=a_{P_1*P_2*\cdots\cdots*P_n}$，则定理 4 说明 $a^{(n)}$ 为减少函数列：$a^{(n+1)}\leq a^{(n)}$.

**定理5** 设 $P(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\in\mathscr{P}$ 则有渐近等式 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2x^n\sim\frac{4a_{P*\overline{P}}}{1-x}$ $(x\to1)$.

特别有 $\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2\sim4a_{P*\overline{P}}N(N\to\infty)$

在上两等式中 $a_{P*\overline{P}}=1$ 充要条件为 $P(z)=\frac{1+\overline{e}^{i\theta}z}{1-\overline{e}^{i\theta}z}$

**证明** 若 $P(z)\in\mathscr{P}$，由引理2, 3 知 $P*\overline{P}\in\mathscr{P}$. 易见 $\max_{|z|=r}|P*\overline{P}|=1+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_n|^2r^n$，

由定理1（ii）知 $\frac{1-r}{1+r}\left(1+\frac{1}{2}\sum_1^{\infty}|c_n|^2r^n\right)\to a_{P*\overline{P}}$ $(r\to1)$，

即 $$\sum_1^{\infty}|c_n|^2r^n\sim\frac{4a_{P*\overline{P}}}{1-r}\quad(r\to1).$$

由引理有 $\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2\sim4a_{P*\overline{P}}N$ $(N\to\infty)$. 若 $a_{P*\overline{P}}=1$，由定理3 $a_P=1$. 再由推论1，

$P(z)=\dfrac{1+e^{-i\theta}z}{1-e^{-i\theta}z}$. 反之是明显的.

**推论 3** 若$P(z)\in\mathscr{P}$，则$a_P=0\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{N}|c_n|^2=o(N)$.

**证明** 由定理 3 $a_{P\cdot\overline{P}}\le a_P=0$，即$a_P=0\Rightarrow a_{P\cdot\overline{P}}=0$；再由定理 5 即得$\sum\limits_{n=1}^{N}|c_n|^2=o(N)$. 若此成立，则$a_{P\cdot\overline{P}}=0$；由定理 3 有$a_P^2\le a_{P\cdot\overline{P}}=0$ 即得$a_P=0$.

**推论 4** 若$P_0\in\mathscr{P}$，$a_{P_0}=0$，$P_0=1+\sum c_n^{(0)}z^n$，则对任何$P(z)=1+\sum c_nz^n\in\mathscr{P}$有$\sum\limits_{n=1}^{N}|c_n^{(0)}c_n|^2=o(N)$.

**证明** 由于推论 2，$a_{P\cdot P_0}=0$；再由推论 2，$a_{P\cdot P_0\cdot\overline{(P\cdot P_0)}}=0$；再由定理 5 即得所证.

**推论 5** 设$P(z)=1+\sum\limits_{1}^{\infty}c_nz^n\in\mathscr{P}$. 对任何正整数 $k$ 存在$a_{p,k}$满足渐近等式（$|a_{p,k}|\le4$）.

$$|c_k|^2+|c_{2k}|^2+\cdots+|c_{kN}|^2\sim a_{p,k}N\ (N\to\infty\quad k=1,2,\cdots).$$

**证明** $P(z)\in\mathscr{P}$，作函数$g_k(z)=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{l=1}^{k}P(w_lz)$，其中$w_l$（$i=1,\cdots,k$）为$w^k=1$的单位根，显然$g_k(z)\in\mathscr{P}$，且

$$g_k(z^{\frac{1}{k}})\ 1+c_kz+c_{2k}z^2+\cdots+c_{kn}z^n+\cdots.$$

对$g_k$应用定理 5 就证得结论.

**定理 6** 对任何$P_1(z)$，$P_2(z)\in\mathscr{P}$，令

$$M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_1(re^{i\theta})||P_2(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

则 $$\lim_{r\to1}(1-r)M(r)=2a_{(P_1P_2)^{\frac{1}{2}}}<2.$$

**证明** 设$P(z)=1+\sum c_nz^n\in\mathscr{P}$. 由定理 1（ii）有

$$\frac{1-r}{1+r}\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2r^n\Big)\sim a_P.$$

因此 $$(1-r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(z)|^2d\theta=(1-r)\Big(1+\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}\Big)$$

$$\sim\frac{1-r^2}{1+r^2}\Big(1+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}\Big)\ 2\cdot\frac{1+r^2}{1+r}\sim2a_P.$$

对$P_i\in\mathscr{P}$，作解析函数$P(z)=(P_1(z)P_2(z))^{\frac{1}{2}}$，显然$P(o)=1$. 由于$|\arg P_i(z)|<\dfrac{\pi}{2}$（$i=1,2$），所以$|\arg P(z)|\le\dfrac{1}{2}|\arg P_1(z)|+\dfrac{1}{2}|\arg P_2(z)|<\dfrac{\pi}{2}$. 从此说明$P(z)\in\mathscr{P}$. 定理成立.

## 四 对单叶函数的应用

若$f\in S\log\dfrac{f(z)}{z}=2\sum\limits_{1}^{\infty}r_nz^n$，1978 Duren[5]证得

若 $\dfrac{(1-r)^2}{r}\max|f(z)|\to a_f\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{N}n^2|r_n|^2=O(N)$.

当$a_f=0$时，要上式成立却是难题. 但$f\in S^*$时上式成立. 关于这一点我们有更强的.

**定理7** 设$f\in S^*$，则$\sum\limits_{n=1}^{N}n^2|r_n|^2\sim aN\ (N\to\infty)$，其中$a=a_{P\cdot\overline{P}}$，$P=z\dfrac{f'}{f}$，且$a=1$ $\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{z}{(1-e^{it}z)^2}$.

**证明** $f\in S^*$，则$\dfrac{zf'}{f}=P(z)\in\mathscr{P}$ 而$\dfrac{zf'}{f}=1+2\sum\limits_{1}nr_nz^n$，

由定理5有 $\sum\limits_{n=1}^{N}n^2|r_n|^2\sim aN$，$a=1\Leftrightarrow a_P=1\Leftrightarrow P(z)=\dfrac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z}\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{z}{(1-e^{it}z)^2}$.

**定理8** 设$f\in S$为典型实照函数，$f(z)=\sum c_nz^n$，则$\sum\limits_{n=2}^{N}|a_{n+1}-a_{n-1}|^2\sim a_fN$，

$a_f$仅与$f$有关，且$a_f=1\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{z(1+e^{it}z)}{(1-z^2)(1-e^{it}z)}$.

**证明** $f$典型实照，则$(1-z^2)\dfrac{f(z)}{z}\in\mathscr{P}$，

$$(1-z^2)\frac{f(z)}{z}=1+a_2z+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_{n-1})z^n.$$

由定理5即得$a_f=1\Leftrightarrow(1-z^2)\dfrac{f(z)}{z}=\dfrac{1+e^{it}z}{1-e^{it}z}$.

## 参 考 文 献


[1] Hardy, G. H., Divergent Series.

[2] Pommenerke. Uirivalent Functions, 1975.

[3] Schoker, G., Univalent Functions - Selected Topics, Lecture Notes in Math. 487 (1975).

[4] Lar V. Ahlfors, Conformal Invariants, 1973.

[5] Duren, J. Anal. Math. Soc., (1979) 36—43.