自治系统的不稳定定理及其应用*

刘　　冰

（南京师范大学）

本文建立了一个关于自治系统（2.1）的未被扰动运动为不稳定的定理，它是Красовский在文〔2〕中建立的不稳定定理的推广．运用这个定理，本文讨论了两个三阶非线性系统未被扰动运动为不稳定的条件，对文〔3〕中给出的零解不稳定条件进行了改进．

一　引　　言

利用Ляпунов函数解决非线性系统的稳定性问题，已有过很多讨论，如文〔1〕中所述，但对非线性系统解的不稳定性讨论尚少．在有关系统不稳定性的文章中，一般都是采用Красовский所建立的不稳定定理〔2〕．本文建立了一个新的不稳定定理，对Красовский定理作了进一步的改进，不仅降低了其定理条件，也更清楚地反映了系统解的不稳定实质．

作为定理的应用，本文首先讨论了一个一般形式的三阶非线性系统（3.1）的零解为不稳定的条件．表明对此系统的零解为全局渐近稳定所给出的充分条件中哪些是必要的，然后对文〔3〕中讨论的系统的不稳定条件重新进行了讨论，得出了比之更弱的条件．

二　不稳定性定理

我们考虑自治系统

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\quad(i=1,\cdots,\ n)\tag{2.1}$$

其中X_i（$i=1,\cdots,\ n$）为$x_1,\ \cdots,\ x_n$的实函数，在$|x_s|\le A$（$s=1,\cdots,\ n$）（A为正常数）内连续，满足解的唯一性条件，$X_i(0,\cdots,\ 0)=0$，且假定点$O(0,\cdots,\ 0)$是系统（2.1）的孤立奇点．

定理2.1　假设对系统（2.1）存在一个连续函数$V(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，具有$V(0,\cdots,\ 0)=0$，满足条件

〈1〉在原点的任意小邻域内都有域$V\ge 0$存在；

〈2〉在域$V>0$内，$V(x_1,\ \cdots,\ x_n)$关于系统（2.1）的导数

$\frac{dw}{dt}\Big|_{(2.1)}\triangleq\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{V(x_1(t+h,\ t_0,\ x_1^0),\cdots,x_n(t+h,\ t_0,\ x_n^0))-V(x_1,\ \cdots,\ x_n)}{h}\ge 0$ 这里$x_s(t,\ t_0,\ x_s^0)$为（2.1）满足$x_s(t_0,\ t_0,\ x_s^0)=x_s^0$（$s=1,\cdots,\ n$）的解；（若$V(x_1,\ \cdots,\ x_n)$可微，则$\frac{dw}{dt}\Big|_{(2.1)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}X_i$．）

* 1984年2月9日收到．

〈3〉$V>0$ 的域内使 $\frac{dw}{dt}\Big|_{(2.1)}=0$ 的点集不包含系统（2.1）的任何正半轨线（除了零解 $x\equiv 0$），则系统（2.1）的零解为不稳定.

证　由条件〈1〉，对某一个 $\varepsilon_0>0$，在 $|x_s|\le\varepsilon_0$（$s=1,\cdots,n$）中有域 $V\ge 0$ 存在，在此域上对任意小的 $\delta>0$（$\delta<\varepsilon_0$），总可以取到点 $0<|x_s^0|\le\delta$（$s=1,\cdots,n$），使得 $V(x_1^0,\cdots,x_n^0)=V_0>0$.

现在取取初始条件 $x_s(0)=x_s^0$（$s=1,\cdots,n$），则可确定系统（2.1）的一个解 $x_s(t)$（$s=1,\cdots,n$）. 我们证明这个解在某个时刻 t_1 和某 s_0 以后有 $|x_{s_0}(t_1)|\ge\varepsilon_0$（$s=1,\cdots,n$）.

用反证法，假设这个解 $x_s(t)$ 永远会停留在 $|x_s(t)|\le\varepsilon_1$（$s=1,\cdots,n$）中. 由条件〈2〉和〈3〉，$x_s(t)$（$s=1,\cdots,n$）不能永远停留在 $\dot{V}=0$ 的点集上，且存在时刻 $\tau>0$，当 $t\ge\tau$ 时有 $V(x_1(t),\cdots,x_n(t))>V(x_1^0,\cdots,x_n^0)\ge 0$；又由 $V(0,\cdots,0)=0$、函数 V 的连续性及条件〈2〉知，$V(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 是非减有界的，所以必有极限 $\lim\limits_{t\to\infty}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=V^*>0$.

因为过点 x_s^0（$s=1,\cdots,n$）的轨线的 ω 极限点集 Ω 为非空的，且不包含原点（否则有 $\lim\limits_{t\to\infty}V(x_1(t),\cdots,x_n(t))=0$），而且 Ω 仍然包含在 $|x_s|\le\varepsilon_0$ 中的域 $V\ge 0$ 内，又 Ω 由系统（2.1）的整条轨线组成，且当 $\xi_s\in\Omega$（$s=1,\cdots,n$）时，有 $V(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))=V^*$ 对一切 $t\ge\tau>0$ 成立，由此就有 $\dot{V}\big|_{(2.1)}(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))\equiv 0$ 对一切 $t\ge\tau>0$ 成立. 这就与定理假设〈3〉矛盾.

故对某个 $t>0$ 以后，一定会有某一个 s_0 以后使 $|x_s(t)|>\varepsilon_0$（$s=1,\cdots,n$）.

因为初始点 x_s^0（$s=1,\cdots,n$）可以在域 $V\ge 0$ 中选择得任意靠近原点，这就表明原点 $O(0,\cdots,0)$ 为不稳定奇点. 定理得证.

定理2.1把对系统的限制缩小到包含原点在内的某个小区域上，这就更清楚地反映了系统的零解为不稳定的实质.

三　定理2.1的应用

我们首先讨论一个很一般形式的三阶非线性系统（3.1）的零解为不稳定的条件.

$$\dddot{x}+f_1(x,\dot{x})\ddot{x}+f_2(x,\dot{x})+f_3(x)=0 \tag{3.1}$$

这里 f_1，f_2，f_3 都是 x，$\dot{x}$ 的连续可微函数，且有 $f_2(0,0)=f_3(0)=0$.

一般说来，人们比较关心一个系统的未被扰动运动稳定的条件，希望使稳定条件达到最佳，即是必要的. 但众所周知，对非线性系统来说这是很困难的，尤其是对一个含有多个非线性函数的一般系统. 所以一般的作法是尽量降低条件以至于接近必要. 下面为了对比讨论，我们首先给出系统（3.1）零解为全局渐近稳定的一个充分条件，然后用定理2.1来证明，当这个充分条件中某些部分被破坏时，就能得到系统的零解为不稳定的结论. 以此证明这个充分条件中哪些部分是必不可少的.

考虑系统（3.1）的等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=z\\ \dot{z}=-f_3(x)-f_2(x,y)-f_1(x,y)Z.\end{cases} \tag{3.2}$$

先给出（3.1）的零解为全局渐近稳定的一个定理.

定理3.1 对系统（3.2），若有下述条件成立，

〈1〉 $f_1(x, y) > a > 0$ （a 是常数可充分小）；

〈2〉 $a\dfrac{f_2(x, y)}{y} - f_3'(x) > 0$ （$y \neq 0$）；

〈3〉 $xf_3(x) > 0$ （$x \neq 0$）；$yf_2(x, y) > 0$ （$y \neq 0$）；

〈4〉 $a\dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} y + \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \leq 0$；

〈5〉 $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} F(x, y) = +\infty$，

这里 $F(x, y) = \int_0^x f_3(\xi)\,d\xi + f_3(x)y + \int_0^y f_2(x, \eta)\,d\eta$，则系统（3.2）的零解为全局渐近稳定的.

证 对系统（3.2）作Ляпунов函数

$$V(x, y, z) = a\int_0^x f_3(x)\,dx + f_3(x)y + \int_0^y f_2(x, y)\,dy + \frac{(ay+z)^2}{2} + a\int_0^y (f_1(x, y) - a)\,y\,dy,$$

则 $V(x, y, z)$ 关于（3.2）的全导数

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.2)} = \left(f_3'(x) - a\frac{f_2(x, y)}{y}\right)y^2 + (a - f_1(x, y))\,z^2 + y\int_0^y \left(a\frac{\partial f_1}{\partial x}y + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dy \leq 0.$$

另外可证 $V(x, y, z)$ 是定正的. 事实上，只需证函数 V 的前三项关于 x，y 为正定即可.

令 $F(x, y) = F_3(x) + f_3(x)y + F_2(x, y)$，其中 $F_3(x) = \int_0^x f_3(x)\,dx$；$F_2(x, y) = \int_0^y f_2(x, y)\,dy$. 则有

$$F(x, y) = \frac{(2aF_3(x) + f_3(x)y)^2 - f_3^2(x)y^2 + 4aF_3(x)F_2(x, y)}{4aF_3(x)},$$

由条件 $xf_3(x) > 0$ （$x \neq 0$）知 $F_3(x) > 0$，故只需考虑 $4aF_3(x)F_2(x, y) - f_3^2(x)y^2 > 0$ 即可. 而

$$\begin{aligned} 4aF_3(x)F_2(x, y) - f_3^2(x)y^2 &= 4a\int_0^x f_3(x)\,dx\int_0^y f_2(x, y)\,dy - 4\int_0^x f_3(x)\,df_3(x)\int_0^y y\,dy \\ &= 4a\int_0^x f_3(x)\,dx\int_0^y f_2(x, y)\,dy - 4\int_0^x f_3(x)\int_0^y f_3'(x)\,y\,dx\,dy \\ &= 4\int_0^x f_3(x)\int_0^y \left[a\frac{f_2(x, y)}{y} - f_3'(x)\right] y\,dx\,dy, \end{aligned}$$

由条件〈2〉，〈3〉知上式关于 x，y 为正定的.

又因为当 x 任意取值，$y = 0$，$z = 0$ 时不是系统(3.2)的非零解，由Барбашин-Красовский稳定性定理知，系统（3.2)的零解是全局渐近稳定的. 定理3.1得证.

分析定理3.1的条件，我们知道条件〈5〉仅仅是为了系统（3.1）的零解为全局稳定而

设，没有它仍可得到系统零解的局部渐近稳定；当$f_1(x,y)=f_1(y)$，$f_2(x,y)=f_2(y)$ 条件〈4〉必然满足不必列出，故对系统的平凡解稳定性起决定作用的是条件〈1〉，〈2〉，〈3〉．下面我们就用定理2.1出证明当定理3.1中条件〈1〉、〈2〉，〈3〉之一不成立时，可导致（3.2）的零解为不稳定．

定理3.2 对系统（3.2），非线性函数f_1，f_2，f_3只要在空间坐标第一挂限中的域$y\geq x$上满足条件

〈1〉 $f_1(x,\ y)<0$；

〈2〉 $xf_3(x)>0\ \ (x\neq 0)$，$yf_2(x,\ y)>0\ \ (y\neq 0)$；

〈3〉 $\dfrac{\partial f_2(x,\ y)}{\partial x}\geq 0$；

则系统（3.2）的零解为不稳定．

证 作Ляпунов函数

$$V(x,\ y,\ z)=yf_3(x)+\frac{1}{2}z^2+\int_0^y f_2(x,\ y)\mathrm{d}y.$$

由条件〈2〉知，当$|x|\neq 0$足够小时有$f_3'(x)>0$，且有$\int_0^y f_2(x,\ y)\mathrm{d}y>0$，在我们所考虑的第一挂限中的域$y\geq x$上也有$yf_3(x)>0$，所以在此域上有$V(x,\ y,\ z)\geq 0$．

在此域上有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.2)}=y^2f_3'(x)-f_1(x,\ y)z^2+y\int_0^y\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathrm{d}y\geq 0\ .$$

考查使$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.2)}=0$的点集，它只包含$x$轴上的点（即$y=0$，$z=0$），显然地，$x$任意，$y=0$，$z=0$不是系统（3.2）的非零解．实际上，$x$轴上的非零点也不在域$V\geq 0$内.）故由定理2.1知，系统（3.2）的零解为不稳定．

定理3.3 对系统（3.2），若在第一挂限中的域$z\geq x$上满足条件

〈1〉 $f_1(x,\ y)>a>0$；

〈2〉 $yf_2(x,\ y)<0\ \ (y\neq 0)$；$xf_3(x)>0\ \ (x\neq 0)$；

〈3〉 $\dfrac{\partial f_1(x,\ y)}{\partial x}y\geq 0$，

则系统（3.2）的零解为不稳定．

证 作Ляпунов函数如下：

$$V(x,\ y,\ z)=\int_0^x f_3(x)\mathrm{d}x+yz+\int_0^y yf_1(x,\ y)\mathrm{d}y.$$

由条件〈2〉知$\int_0^x f_3(x)\mathrm{d}x>0\ \ (x\neq 0)$，在第一挂限中的域$z\geq x$中$yz>0$，故在此域上有$V\geq 0$．

另外，$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.2)}=z^2-yf_2(x,\ y)+y\int_0^y\frac{\partial f_1}{\partial x}y\mathrm{d}y\geq 0\ .$

而要使$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(3.2)}=0$，必有$y=z=0$，而当$x$可任意取值时，它不是（3.2）的非零解．故定理2.1的条件满足，系统（3.2）的零解是不稳定的．

显然在系统（3.2）中，若取$f_1(x,\ y)=f_1(y)$，$f_2(x,\ y)=f_2(y)$，则定理3.2及定理3.3中的条件〈3〉皆自然满足，不必列出．

由上述两个定理可知，对系统（3.2）的非线性函数，只要在包含原点在内的一个小区域上不满足定理3.1的条件〈1〉或〈2〉，就可导出系统的零解为不稳定的．

实际上，在系统（3.2）为线性的情况下，即

$$\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=D,$$

定理3.2的条件〈1〉退化为$a<0$，而定理3.3的条件〈2〉退化为$b<0$．都破坏了Routh—Hurwitz关于线性系统为稳定的条件．

下面我们考虑文〔3〕中所讨论的系统

$$\dddot{x}+f_1(\ddot{x})+f_2(\dot{x})+f_3(x)+f_4(x,\ \dot{x},\ \ddot{x})=0, \tag{3.3}$$

这里$f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)=f_4(0,\ 0,\ 0)$，$f_1$，$f_2$，$f_3$，$f_4$都是连续可微函数．

考虑（3.3）的等价系统

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=z \\ \dot{z}=-f_1(z)-f_2(y)-f_3(x)-f_4(x,\ y,\ z) \end{cases} \tag{3.4}$$

完成类似定理3.2的证明，取Ляпунов函数

$$V(x,\ y,\ z)=yf_3(x)+\frac{1}{2}z^2+\int_0^y f_2(y)\,dy.$$

对系统（3.4）只需在第一挂限中的区域$y>x$内限制$xf_3(x)>0$（$x\neq 0$）；$yf_2(y)>0$（$y\neq 0$）及$z[f_1(z)+f_4(x,\ y,\ z)]<0$，就能得到系统（3.4）的零解为不稳定的结论．显然此限制大大地减少了文〔3〕中定理2的条件．

由上述讨论可知，在适当地选取函数V后，只需使非线性系统在包含原点的一个充分小的域$V\geq 0$上不满足广义Hurwitz条件，就可达到系统的不稳定，故广义Hurwitz条件对非线性系统的稳定性起着决定的作用．

参考文献

〔1〕R. Reissg G, Sansone, R. Conti, Non-linear Differential Equations of Higher Order, 1974.

〔2〕H. H. Красовский, Доклады Акагéмии Наук СССР (1955), Том 101, 17—21.

〔3〕W. A. Skrapek, Math. Nachr., 96, 113—117 (1980).

〔4〕廖晓昕，中国科学数学专辑（I），1979，124—134.

An Instability Theorem of Autonomous Systems and Its Application

Liu Bing

Abstract

In this paper, we give an instability theorem for autonomous systems by constructing Liapunov functions. It is generalization of Klasovskii theorem (see 〔2〕). Than, we give the sufficient conditions of instability, which are less than those of in 〔3〕, for two non-linear systems of third order.

（接22页）
量化定理.

定理5　M_0-空间X可度量化当且仅当X有一个σ-闭包保持开闭基$\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_n:n\in N\}$使得对每个$x\in X$及$n\in N$，$\bigcap\{B:x\in B\in\mathscr{B}_n\}$是X的邻域.

西北大学高智民同志对本文提出过许多有益建议，特此致谢.

参 考 文 献

〔1〕Ceder, J., Some generalizations of metric spaces, Pacific J. Math., 11(1961), 105—125.

〔2〕Gao Guoshi, A note on M_1-spaces, Pacific J. Math., 108(1983), 121—128.

〔3〕Junnila, H., A charaeterization of M_0-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 91(1984), 481—484.

On Sum Theorems For M_1-Spaces

Yang Lecheng

Abstract In this paper, two sum theorems for M_1-spaces are obtained. These results improve two results obtained by Gao Guoshi in 〔2〕 respectively. A result for M_0-spaces is also obtained which answers J.Nagata's question partly.