1988年2月

数学研究与评论
第八卷　第一期

一类抛物型系统的参数辨识*

喻　文　焕

（南开大学，天津）

本文讨论的分布参数系统是由二阶线性抛物型方程的混和始边值问题所描述，求解的区域是多连通的。若状态向量在内边界上的值未知，我们可利用在外边界上的附和量测值求最佳地确定内边界值。

本文分别对于三种量测方式给出了求内边界值的计算公式系，并对其中的两种证明了辨识内边界值的问题是适定的，即存在唯一的参数满足要求，且求出的是佳参数连续地依赖于量测值。

在自然界与工程问题中，存在一类由抛物型方程描述的分布参数系统，该系统的特征是：状态向量存在的空间范围Ω是由二不相交的封闭曲面所包围。

比如，〔1〕中曾讨论了液浮陀螺仪浮筒表面温度的辨识，由于浮筒悬浮在液体当中，其表面的温度难以测量，而仅能在仪器的壳上测量温度，这个系统存在的区域就由二个互不相交的曲面所包围。

又如，〔2〕中曾讨论了：利用人体皮肤上测量的数据来辨识心脏的一些参数。这又是系统存在的区域由二不相交曲面所范围的例子。

这类问题的一个重要特征是：在内边界上的数据一般不能用测量方式得到，而应当利用边界其它部分的测量值来估计。

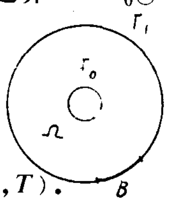
本文将〔1〕、〔2〕中讨论的问题（都是特殊的椭圆型方程）推广到较一般的抛物型系统。

我们的方法是：将内边界值当做参数（当然是一个函数），然后利用函数空间优化方法找寻最佳参数，并且对两种量测方式，证明了辨识参数问题是适定的。

Ⅰ　问题的叙述

假定区域$\Omega\subset \boldsymbol{R}^m$由两个互不相交的光滑封闭曲面所包围。Ω 的边界$\partial\Omega=\Gamma_0\cup\Gamma_1$

分布参数系统的状态方程是：



图一

$$\Lambda y\triangleq\frac{\partial y}{\partial t}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}+b_i(x,t)y\Big]$$

$$+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i}+a(x,t)y=f(x,t),\quad (x,t)\in Q\triangleq\Omega\times(0,T).\tag{1.1}$$

$$y|_{\Sigma_0}=v,\quad \Sigma_0\triangleq\Gamma_0\times(0,T)\tag{1.2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu}+y\sum_{i=1}^{m}b_i\cos(n_1x_i)|_{\Sigma_1}=g,\quad \Sigma_1\triangleq\Gamma_1\times(0,T)\tag{1.3}$$

* 1984年10月15日收到.

$$y|_{t=0}=y_0(x), \qquad x\in\Omega \tag{1.4}$$

其中 y 是状态向量，

$$\frac{\partial y}{\partial y}\triangleq\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i), \tag{1.5}$$

n—边界2Ω的外法向么矢.

关于问题（Ⅰ）的可能性，由〔3〕得到

引理1.1 假定（Ⅰ）满足

$$\mu^{-1}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\mu\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2,\ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^m, p.p(x,t)\in Q,$$

$$\|\sum a_i^2,\sum b_i^2,a,f,g\|_{L^\infty(Q)}\leqslant\mu,$$

$$\psi_0\in H^1(\Omega), v\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$$

边界2Ω是光滑的. 则问题（Ⅰ）在 $V\triangleq W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ 中是适定的.

其中 $H^1(\Omega)$、$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$、$W_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ 的定义见〔3〕. ■

根据引理1.1，若已知 f、g、y_0，$\forall v\in\mathscr{U}\triangleq H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$，则（Ⅰ）便存在唯一解 y. 为了表示这种依从关系，记 $y=y(v)=y(x,t\,v)$. 根据本问题的特征，不失一般性，可以假定 $f=g=y_0=0$，于是由〔3〕，可得

$$y(v)=Ev, \qquad E\in L(\mathscr{U};V). \tag{1.6}$$

其中L(A, B)表示自Banach空间 A 到Banach空间B的有界线性算子空间.

若 v 未知，但我们可在 $B\in\Gamma_1$ 上测得 y 的值：

$$z=cy, \qquad c\in L(V;Z) \tag{1.7}$$

其中 c 是量测算子，Z是量测空间. 为了估计内边界值 v，我们可使用最小二乘法求评估拟合的优劣. 因此，内边界值的最佳估值应当使下列泛函取极小值：

$$J(v)\triangleq\|cy(v)-z\|_Z^2, \tag{1.8}$$

此处 v 是变化在某个容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}\subset\mathscr{U}$ 内（$\mathscr{U}_{ad}$ 由问题的实际背景而提出）.

注：由于我们企望 v 逼近于真正的内边界值，故不能在（1.8）中引入 $\rho\|v\|^2$ 项. 这是本问题不同于一般最优控制之处. 当引入 $\rho\|v\|^2$ 后，〔4〕中已有一些结果论及，该问题比本问题简单.

定义 若存在唯一的参数 $u\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得（1.8）取极小，即

$$J(u)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}J(v)$$

则说系统（Ⅰ）的参数 v 在容许参数集 $\mathscr{U}_{ad}$ 内是能辨识的. 此外，若辨识出的最佳参数连续依赖于量测数据，则说辨识该参数的问题是适定的.

我们还需要

引理1.2〔4〕 假定 $\mathscr{U}_{ad}\subset\mathscr{U}$ 是有界闭凸集，$\pi(v_1,v_2)$、$l(v)$ 分别是 $\mathscr{U}$ 上的连续双线性泛函、线性泛函. 若

$$\pi(v,v)\geqslant0, \qquad \forall v\in\mathscr{U}$$

则存在最佳参数 $u\in\mathscr{U}_{ad}$ 使得目标泛函

$$\widetilde{J}(v)=\pi(v,v)-2l(v)$$

取极小值，即

$$\widetilde{J}(u)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}\widetilde{J}(v). \tag{1.9}$$

且$u\in\mathscr{U}_{ad}$是最佳参数的充要条件为

$$\pi(u,v-u)\geqslant l(v-u),\qquad \forall v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{1.10}$$

此外，若$\pi(v,v)$满足强制条件

$$\pi(v,v)\geqslant a\|v\|^2,\qquad \forall v\in\mathscr{U},\quad a>0, \tag{1.11}$$

则使得（1.9）成立的u在$\mathscr{U}_{ad}$内还是唯一的.

Ⅱ 根据局部边界量测辨识 v

假定在Γ_1的子集B上量测y：

$$z=z(s,t)=y(s,t),\qquad (s,t)\in B\times(0,T) \tag{2.1}$$

此时量测空间$Z\triangleq L^2(B\times(0,T))$，于是（1.8）成为

$$J_1(v)=\int_0^T\int_B|\gamma_B y(v)-z|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

其中$\gamma_B y(v)=y(v)|_B$，迹算子$\gamma_B\in L(V;L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)))$.

容许参数集$\mathscr{U}_{ad}$取为：

$$\mathscr{U}_{ad}\triangleq\left\{\begin{array}{l} v;\ v\in L^2(0,T;H^1(\Gamma_0)),\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;H^{-2}(\Gamma_0)), \\ \|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))}\leqslant M \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

其中M是常数.

注 由于v是（Ⅰ）的边值，故要求广义导数$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;H^{-2}(\Gamma_0))$是合理的.

定理2.1 假定系数（Ⅰ）满足引理1.1的条件，$J_1(v)$和$\mathscr{U}_{ad}$分别由（2.2）、（2.3）定义，mes$B>0$. 则系统（Ⅰ）的参数v是能辨识的，即存在唯一的参数$u\in\mathscr{U}_{ad}$使（2.2）取极小值：

$$J_1(u)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}J_1(v), \tag{2.4}$$

且u为最佳参数的充要条件是

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{2p}{\partial\gamma^*}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\geqslant 0,\qquad \forall v\in\mathscr{U}_{ad} \tag{2.5}$$

其中$p=p(u)$是下述问题的解：

$$\begin{aligned} &\Lambda^*p\triangleq-\frac{\partial p}{\partial t}-\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial x}\Big[\sum_{j=1}^m a_{ji}\frac{\partial p}{\partial x_j}+a_i p\Big]+\sum_{i=1}^m b_i\partial_i p+ap=0,\quad (x,t)\in Q \\ &\Big[\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}+p\sum_{i=1}^m a_i\cos(n,x_i)\Big](s,t)=\left\{\begin{array}{ll}\gamma_B y(u)-z, & (s,t)\in B\times(0,T) \\ 0, & (s,t)\in(\Gamma_1\setminus B)\times(0,T)\end{array}\right. \\ &p|_{\Sigma_0}=0,\quad p|_{t=T}=0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}\triangleq\sum_{i,j=1}^m a_{ji}\partial_j p\cos(n,x_i). \tag{2.7}$$

最后，最佳参数$u\in\mathscr{U}_{ad}\subset L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))$还连续依赖于量测值$z\in L^2(B\times(0,T))$．即辨识$v$的问题是适定的．

证 令

$$\left.\begin{aligned}\pi_1(v_1,v_2)&\triangleq\int_0^T\int_B[\gamma_B y(v_1)][\gamma_B y(v_2)]\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad v_1,v_2\in\mathscr{U}\\ l_1(v)&\triangleq\int_0^T\int_B[\gamma_B y(v)]z\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad v\in\mathscr{U}\end{aligned}\right| \tag{2.8}$$

显然它们分别是$\mathscr{U}$上的连续双线性、线性泛函．因$\mathscr{U}_{ad}$是$L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))$中的有界闭凸集，故由引理1.2的第一部分，$\exists u\in\mathscr{U}_{ad}$使泛函

$$J_1(v)=\pi_1(v,v)-2l_1(v)+\int_0^T\int_B z^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{2.2$'$}$$

取极小值，即

$$J_1(u)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}J_1(v). \tag{2.9}$$

下面证明$\pi_1(v,v)$在$\mathscr{U}$中满足强制条件．根据 Соболев空间中的紧致定理，集合

$$\mathscr{U}^*_{ad}\triangleq\left\{v\in\mathscr{U}_{ad};\ \|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))}=\frac{M}{2}\right\} \tag{2.10}$$

在$\mathscr{U}$中的强闭包$\overline{\mathscr{U}^*_{ad}}$是紧集．连续泛函$F(v)\triangleq\pi_1(v,v)$在$\overline{\mathscr{U}^*_{ad}}$中达到自己的下确界，即$\exists v_0\in\overline{\mathscr{U}^*_{ad}}$，使得

$$a=F(v_0)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}F(v). \tag{2.11}$$

若$a=0$，则显然可得到$\gamma_B y(v_0)=0$，即$y(v_0)$满足

$$\Lambda y=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial \nu}\Big|_B=0,\qquad y|_B=0,$$

根据抛物型方程广义Cauchg 问题的唯一性[6]，立即可得$y(v_0)=0$，因而$v_0=0$，但此同$v_0\in\overline{\mathscr{U}^*_{ad}}$矛盾．故$a>0$.

$$\forall v\in\mathscr{U}_{ad}\text{ 且 }v\neq0,\text{ 则 }\frac{v}{\|v\|_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))}}\cdot\frac{M}{2}=v_1\in\mathscr{U}^*_{ad},$$

故

$$\left(\frac{M}{2}\right)^2\frac{1}{\|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))}}\pi_1(v,v)=\pi_1(v_1,v_1)\geqslant a>0,$$

$$\therefore\quad \pi_1(v,v)\geqslant\left(\frac{2}{M}\right)^2a\|v\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))},\qquad \forall v\in\mathscr{U}_{ad} \tag{2.12}$$

而当$v=0$时，（2.12）显然成立．故由引理1.2 的第三部分，使得（2.9）成立的u还是唯一的。

由引理1.2的第二部分，对于最佳参数u应有

$$\pi_1(u,v-u)\geqslant l_1(v-u). \tag{2.13}$$

即

$$\int_0^T\int_B[\gamma_B y(u)-z][\gamma_B y(v)-\gamma_B y(u)]\mathrm{d}s\mathrm{d}t\geqslant0,\qquad\forall v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{2.14}$$

又由引理1.1，（2.6）是适定的．故存在唯一解$p\in V$，因此下列运算是合理的：

$$0=\int_Q\{p\Lambda[y(v)-y(u)]-[y(v)-y(u)]\Lambda^*p\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_\Omega p[y(v)-y(u)]\mathrm{d}x\,\Big|_{t=0}^{T}-\int_\Sigma p\{\frac{\partial}{\partial\gamma}+\sum_{i=1}^{m}b_i\cos(n_1x_i)\}[y(v)-y(u)]\mathrm{d}\Sigma$$

$$+\int_\Sigma[y(v)-y(u)]\ \{\frac{\partial}{\partial\gamma^*}+\sum_{i=1}^{m}a_i\cos(n,x_i)\}p\mathrm{d}\Sigma$$

$$=\int_0^T\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\int_B[\gamma_By(v)-\gamma_By(u)][\gamma_By(u)-z]\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

将上式与（2.14）结合，便可得到（2.5）．

最后根据 （2.12）及（2.1）：$z=\gamma_By(u)$，立即可得到

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))}\leqslant\frac{M}{2\sqrt{a}}\|z\|_{L^2(B\times(0,T))}. \tag{2.15}$$

根据（2.15），立即可得到定理 2.1 的最后结论.

为了辨识系统（Ⅰ）的内边界值（参考 v）的优化系由（Ⅰ）、（2.6）及（2.5）组成.

Ⅲ. 用局部终端量测辨识参数 v

在某些情况下，能够量测到 y 的局部终端分布量测值:

$$z=z(x)=y(x,T)\qquad x\in\Omega \tag{3.1}$$

此时目标泛函（1.8）成为

$$J_2(v)=\int_\Omega|y(x,T;v)-z(x)|^2\mathrm{d}x\,,\qquad v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{3.2}$$

定理3.1 设系统（Ⅰ）满足引理1.1的条件，$\mathscr{U}_{ad}$由（2.3）定义．则存在唯一的$u\in\mathscr{U}_{ad}$极小化（3.2），

$$J_2(u)=\inf_{v\in\mathscr{U}_{ad}}J_2(v) \tag{3.3}$$

并且 u 为最佳参数的充要条件是

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\geqslant0,\qquad\forall v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{3.4}$$

其中 p 由下式给出:

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^*p=0,\quad(x,t)\in Q,\ p|_{\Sigma_0}=0\\&[\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}+p\sum_{i=1}^{m}a_i\cos(n,x_i)]|_{\Sigma_1}=0,\quad p(T)=y(T;u)-z.\end{aligned}\right| \tag{3.5}$$

最后，辨识出的最佳参数 $u\in L^2(0,T;H^1(\Gamma_0))$ 连续地依赖于量测 $z\in L^2(Q)$．

证 证法基本上类似于定理3.1，只是在证明二次泛函

$$\pi_2(v,v)=\int_\Omega[y(T;v)]^2\mathrm{d}x$$

满足强制条件（1.11）时，略有不同．此时泛函$F_2(v)=\pi_2(v,v)$ 在$\overline{\mathscr{U}^*_{ad}}$ 上取极小值a，若$a=0$，便可得到$y(v_0)$ 满足

$$\Lambda y=0,\qquad y(T)=0 \tag{3.6}$$

然后由向后抛物型方程唯一性[7]，便可得到$y(v_0)=0$，于是$v_0=0$ 矛盾.

对于量测（3.1）、目标泛函为（3.2），优化公式系是由（Ⅰ）、（3.4）及（3.5）组成.

Ⅳ 根据非局部量测辨识参数v

Kaiser[8]曾指出，在某些情况下，需要用y的非局部加权平均值：

$$z_i(t)=\int_{B_i} g_i(\xi)y(\xi_1 t)\mathrm{d}\xi \qquad (i=\overline{1,q}) \tag{4.1}$$

其中$B_i\subset\Gamma_1$是具正测度的子集，g_i是已知的加权函数.（1.8）相应地成为

$$J_3(v)=\sum_{i=1}^{q}\int_0^T\left\{\int_{B_i} g_i(\xi)y(\xi_1 t;v)\mathrm{d}\xi - z_i(t)\right\}^2\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

定理4.1 设系统（Ⅰ）满足引理1.1的条件. 则存在$u\in\mathscr{U}_{ad}$极小化泛函（4.2）. 且u为最佳参数的充要条件是

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_0}(v-u)\frac{\partial p}{\partial\gamma^*}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\geqslant 0, \qquad \forall v\in\mathscr{U}_{ad}. \tag{4.3}$$

其中$p=p(u)$是下述问题的解：

$$\left.\begin{array}{l}\Lambda^* p=0, \quad (x,t)\in Q, \quad p|_{\Sigma_0}=0, \quad p|_{t=T}=0,\\ \left[\dfrac{\partial p}{\partial\gamma^*}+p\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\cos(n,x_i)\right]\Big|_{\Sigma_1}=\sum\limits_{i=1}^{q}\left\{\int_{\Gamma_1}g_i(\xi)y(u)\chi_B\mathrm{d}\xi-z_i\right\}\chi_{B_i}(s)g_i(s),\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s,t)\in\Sigma_1\end{array}\right| \tag{4.4}$$

$$\chi_{B_i}(s)=\left|\begin{array}{ll}1, & s\in B_i\\ 0, & s\notin B_i,\end{array}\right. \qquad (i=\overline{1,q}).$$

（证明同于定理2.1，故略）.

此时的优化公式系为（Ⅰ）、（4.3）及（4.4）.

参 考 文 献

〔1〕Hu Shunju（胡顺菊）and Yu Wenhuan（喻文焕）, Identification of Float Surface Temperature in Floated Gyroscope, Proc.3rd IFAC Symp Control of Distributed Parameter Systems, Toulouce (France), 1982.

〔2〕Colli-Franzone, P.et al., Un metodo per la ricostruzione di Potenziali epicardici dai Potentioli di Superfioie, L.N.A., Pavia, 1976.

〔3〕Ladyzenskaja, O.A. et al., Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, AMS Providence, Rhode Island, 1968, Chap.3.

〔4〕Lions, J.L., Contrôle Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles, Gauthier-Villars, Paris (1968), Chap.1.

〔5〕Lions, J.L.and Magenes, E., Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Its Applications, Vol.I, Springerverlag, N.Y., 1972.

〔6〕Mizohata, S., Unieité du prolongement des Solutions pour quelques operateurs differentiels paraboliques, Memoirs of the College of Science, Vniv. of Kyoto, Series A.V.31, Mathematics, N.3, 219—239, 1958.

〔7〕Yosida, K., Functional Analysis, 5th ed., Springer-Verlag, N.Y., 1978 (Chap.14).

〔8〕Kaise, K.W., A method of Determining the Heater-Sensor Configuration in Temperature Distribution Controlles, Preprints of Paper for IFAC Symp.Control of Distributed Parameter Systems, June 1—3, 1971.