1988年 2 月

数学研究与评论
第八卷　第一期

Padé算子连续的条件*

黄　有　度

（合肥工业大学）

一、引　　言

记$\mathbf{R}_n^m$为有理函数P/Q的集合，P、Q为次数分别不超过m、n的互素多项式．设$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$，$c_0\neq 0$，为形式幂级数．

定义 1　若$r=P/Q\in\mathbf{R}_n^m$使

$$Q(z)f(z)-P(z)=O(z^{m+n+1+j}) \qquad (1)$$

中的j达到最大，则称$r=P/Q$为f的(m,n) Padé 逼近，记为$r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$.

由［1］知，$r_{m,n}$在满足某一正规化条件（例如，令$Q_{m,n}$的不为零的最高次项系数为1）时是唯一存在的．

定义 2　$T_{m,n}$为把形式幂级数f映成其(m,n) Padé逼近的算子：$T_{m,n}f=r_{m,n}$．

定义 3　设I为z平面上一个区域，在I上有定义的函数$f(z)$关于I的范数$\|f\|_{\mathrm{I}}$为

$$\|f\|_{\mathrm{I}}=\sup_{z\in\mathrm{I}}|f(z)|.$$

定义 4　若用c表示无穷序列$\{c_0,c_1,c_2,\cdots\}$，拟范数$\|c\|_{m+n}$定义为$\|c\|_{m+n}=\sup\limits_{0\leq i\leq m+n}|c_i|$.

定义 5　设$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$，$f^*(z)=c_0^*+c_1^*z+c_2^*z^2+\cdots$，I为$z$平面上一个区域，当$c^*$依拟范数$\|\cdot\|_{m+n}$趋向于$c$，即$\|c^*-c\|_{m+n}\to 0$时，有$\|T_{m,n}f^*-T_{m,n}f\|_{\mathrm{I}}\to 0$，则称$T_{m,n}$关于I在$f$连续．

定义6　设$T_{m,n}f=r_{m,n}=P_{m,n}=Q_{m,n}$，$P_{m,n}$与$Q_{m,n}$的实际次数分别为$m'$与$n'$，则$r_{m,n}$的亏量$d_{m,n}$为$d_{m,n}=\min\{m-m',n-n'\}$.

以下为简便起见，定义 4 中的$\|\cdot\|_{m+n}$与定义 6 中的$d_{m,n}$分别记为$\|\cdot\|$与d.

［2］的定理 4 、定理 5 得出如下结论：设I为包含原点而不包含$Q_{m,n}$的零点的区间，则$T_{m,n}$关于I在f连续的充要条件是$d=0$．同一文章的定理 6 则说，若$d>0$，从I中去掉测度可任意小、个数不超过d的若干区间后，$T_{m,n}$就关于I剩下部分在f连续．前一结论把I局限于一个区间，实际上，I可推广到z平面上任何不含$z^{(|j|-j)/2}Q_{m,n}$的零点的有界闭域，且$T_{m,n}$关于I在f连续的充要条件因$d+\frac{j-|j|}{2}=0$．定理 6 的证明过程中有错，因此其结论不对，这在后面说明．

二、主要结论及证明

定理 1 设$f=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$，$c_0\neq 0$，为一形式幂级数，$T_{m,n}=r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$，且

* 1985年 5 月 4 日收到.

$Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$，$P_{m,n}$与$Q_{m,n}$的实际次数分别为$m'$与$n'$，$d=\min\{m-m',n-n'\}$则有：

1．$d+\frac{j-|j|}{2}\geqslant 0$；

2．若$d+\frac{j-|j|}{2}>0$，$T_{m,n}$关于z平面上任何区域I在f不连续；

3．若$d+\frac{j-|j|}{2}=0$，$T_{m,n}$关于z平面上任何不含$z^{(|j|-j)/2}Q_{m,n}$的零点的有界闭域在f连续．

在证明此定理以前，先给出几个引理．

引理1　$d+j\geqslant 0$．

证明　设P、Q为次数分别不超过m、n的多项式，满足$Qf-P=O(z^{m+n+1})$，P、Q有次数为d_0的最大公因式S：$P=SP_0$，$Q=SQ_0$，P_0与Q_0互素．设$Q_0f-P_0=O(z^{m+n+1-t})$．若$Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$且$j<0$，由定义1，$j\geqslant -t$，故$t\geqslant -j>0$．而$S(Q_0f-P_0)=O(z^{m+n+1})$因此$d_0\geqslant t$．$P_0Q_{m,n}-Q_0P_{m,n}=Q_0(Q_{m,n}f-P_{m,n})-Q_{m,n}(Q_0f-P_0)=O(z^{m+n+1-t})$，因为$P_0$, Q_0, $P_{m,n}$, $Q_{m,n}$的次数分别不超过$m-d_0$, $n-d_0$, m, n，且$d_0\geqslant t$，所以上式左边为次数不超过$m+n-t$的多项式，从而$P_0Q_{m,n}-Q_0P_{m,n}\equiv 0$．这样，$P_0=aP_{m,n}$，$Q_0=aQ_{m,n}$，$a$为非零常数．所以$d_0\leqslant d$，又$d_0\geqslant t\geqslant -j$，得$d+j\geqslant 0$．$j\geqslant 0$时$d+j\geqslant 0$显然成立．

引理2　设形式幂级数$f=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$，$c_0\neq 0$，则对任意给定的自然数n和复数u及$\varepsilon>0$，可找到α、β，$\alpha\neq\beta$，使$[(z-\alpha)/(z-\beta)]f=c_0^*+c_1^*z+c_2^*z^2+\cdots$，满足

$|c_i^*-c_i|<\varepsilon$，$i=0,1,\cdots,n-1$；　$|c_n^*-u|<\varepsilon$．

证明　只要取$\alpha=\beta+\lambda\beta^{n+1}$，$\lambda=(u-c_n)/c_0$，$|\beta|<\varepsilon[|\lambda|\cdot(|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_n|)]^{-1}$即可（参见[2，§3]）．

引理3　设形式幂级数$f=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$，$c_0\neq 0$，对任给的自然数n，复数$a\neq 0$及$\varepsilon>0$，有$\delta\neq 0$使$\frac{z-a+\delta}{z-a}f=c_0^*+c_1^*z+c_2^*z^2+\cdots$，满足$|c_i^*-c_i|<\varepsilon$，$i=0,1,2,\cdots,n$．

证明　只要取$|\delta|<\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n+1}|a|^{-2i}\cdot\sum_{i=0}^{n}|c_i|^2\right)^{1/2}$即可．

设P、Q为次数分别不超过m、n的多项式，满足

$$Qf-P=O(z^{m+n+1})\qquad(2)$$

即当$P=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$，$Q=b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n$时，（2）等价于

$$\begin{aligned}
&b_0c_0-a_0=0\\
&b_1c_0+b_0c_1-a_1=0\\
&\cdots\cdots=0\\
&b_nc_{m-n}+\cdots+b_1c_{m-1}+b_0c_m-a_m=0\\
&b_nc_{m-n+1}+\cdots+b_1c_m+b_0c_{m+1}=0\\
&\cdots\cdots=0\\
&b_nc_m+\cdots+b_1c_{m+n-1}+b_0c_{m+n}=0
\end{aligned}\qquad(3)$$

由引理1的证明直接可得引理4：

引理4　设$r_{m,n}=T_{m,n}f=P_{m,n}/Q_{m,n}$，$P$、$Q$满足（2），则$P_{m,n}Q-Q_{m,n}P\equiv 0$，即$r_{m,n}$可由$P/Q$约简得到．

引理 5 设$r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$满足（1），P、Q满足（2），则P、Q有$z^{(|j|-j)/2}$公因式.

证明 只要对$j<0$的情形证明即可．由引理 4 可设$P=SP_{m,n}$，$Q=SQ_{m,n}$，S为次数不超过d的多项式，比较$Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$与$S(Q_{m,n}f-P_{m,n})=O(z^{m+n+1})$即得$S$必有$z^{-j}$因式.

引理 6 当$d+\frac{j-|j|}{2}=0$时，满足（2）的P、Q只能是$P=z^{\frac{|j|-j}{2}}P_{m,n}$，$Q=z^{\frac{|j|-j}{2}}Q_{m,n}$.

证明由d的定义及引理 5 即得.

定理 I 的证明 1．由d的定义及引理 1 即有$d+\frac{j-|j|}{2}\geqslant 0$.

2．设$d+\frac{j-|j|}{2}>0$，只要证明对任意小的$\varepsilon>0$和z平面上任给的区域I，存在$f^*=c_0^*+c_1^*z+c_2^*z^2+\cdots$，$\|c^*-c\|<\varepsilon$ 但$T_{m,n}f^*$在I有极点即可．在I中任取一点$a\neq0$，且a不为$r_{m,n}$的零点．当$j\geqslant0$时取$f^*=\frac{z-a+\delta}{z-a}r_{m,n}$，当$j<0$时取$f^*=\frac{z-a+\delta}{z-a}r_{m,n}\prod_{i=1}^{-j}\frac{z-a_i}{z-\beta_i}$，其中各$a_i$、$\beta_i$与$\delta$按引理 2、引理 3 的方法选取，并使$a, a-\delta, a_i$及$\beta_i$互不相等，而且这两个引理中的$\varepsilon$取为$\varepsilon(1+\frac{|j|-j}{2})^{-1}$．这样，$\|c^*-c\|<\varepsilon$，但$f^*$在I中有极点$a$．又$f^*\in\mathrm{R}_n^m$，$T_{m,n}f^*=f^*$，故$T_{m,n}f^*$在I有极点$a$.

3．设$d+\frac{j-|j|}{2}=0$，由引理 6，含有$m+n+2$个未知量a_i、b_i和$m+n+1$个方程的线性方程组（3）的解向量是一维的，因此（3）的系数矩阵的秩为$m+n+1$，这等价于（3）的后几个线性方程的系数矩阵$\begin{pmatrix} c_{m-n+1}, & \cdots, & c_m, & c_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m, & \cdots, & c_{m+n-1}, & c_{m+n}\end{pmatrix}$的秩为$n$．所以方程（2）中的$Q$可写成

$$Q=\det\begin{pmatrix} c_{m-n+1}, & \cdots, & c_m, & c_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m, & \cdots, & c_{m+n-1}, & c_{m+n} \\ z^n, & \cdots, & z, & 1\end{pmatrix}=z^{\frac{|j|-j}{2}}Q_{m,n}.$$

设I是不含Q的零点的有界闭域，$|Q|$在I上的最小值为$h>0$．当$\|c^*-c\|$充分小时，$\begin{pmatrix} c_{m-n+1}^*, & \cdots, & c_m^* & c_{m+1}^* \\ \cdots & & & \\ c_m^*, & \cdots, & c_{m+n-1}^*, & c_m^*\end{pmatrix}$的秩也为$n$，因此$f^*=c_0^*+c_1^*z+c_2^*z^2+\cdots$代入方程（2）中解$Q^*$可写为

$$Q^*=\det\begin{pmatrix} c_{m-n+1}^*, & \cdots, & c_m^*, & c_{m+1}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m^*, & \cdots, & c_{m+n-1}^*, & c_{m+n}^* \\ z^n, & \cdots, & z, & 1\end{pmatrix}$$

且$\|c^*-c\|$充分小时可使$|Q^*|$在I上的最小值大于$h/2$．并且$\|c^*-c\|\to0$时，$\|Q^*-Q\|_{\mathrm{I}}\to0$，对相应的$P^*$和$P$也有$\|P^*-P\|_{\mathrm{I}}\to0$．又因为I有界，$\|P\|_{\mathrm{I}}$、$\|Q\|_{\mathrm{I}}$都是有限的．这样$\|c^*-c\|\to0$时

$$\|T_{m,n}f^*-T_{m,n}f\|=\left\|\frac{P^*}{Q^*}-\frac{P}{Q}\right\|_{\mathrm{I}}=\left\|\frac{Q(P^*-P)+P(Q-Q^*)}{Q^*Q}\right\|_{\mathrm{I}}$$
$$\leqslant\frac{\|Q\|_{\mathrm{I}}\|P^*-P\|_{\mathrm{I}}+\|P\|_{\mathrm{I}}\|Q^*-Q\|_{\mathrm{I}}}{\frac{1}{2}h^2}\to0.$$

由引理 4、引理 5，满足（2）的P、Q的一般形式为$P=SP_{m,n}$，$Q=SQ_{m,n}$，其中$S=$

$S_0 z^{\frac{|j|-j}{2}}$，S_0为次数不超过$d+\frac{j-|j|}{2}$的任一多项式．这样Q有$d+\frac{j-|j|}{2}$个零点是可任取的．［2］的定理 6 的证明中忽略了这一点，因而得到错误的结论．

Padé逼近表具有方块结构，即Padé表可分解为基本的Padé方块．每个方块中的元素相同．若一个方块的左上角元素为$r_{\lambda,\mu}=P_{\lambda,\mu}/Q_{\lambda,\mu}$，方块边长为$k$，则$Q_{\lambda,\mu}f-P_{\lambda,\mu}=O(z^{\lambda+\mu+k})$，且$P_{\lambda,\mu}$，$Q_{\lambda,\mu}$的次数分别达到$\lambda,\mu$(参见［1］或［3］)．所以，若$r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$，$P_{m,n}$、$Q_{m,n}$的实际次数分别为$m'$、$n'$，$Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$，则$r_{m,n}$所在方块的左上角元素为$r_{m',n'}$，此方块边长$k=m+n+1+j-m'-n'$，$r_{m,n}$到此方块各边距离分别为$m-m'$，$n-n'$，$m'+k-1-m$，$n'+k-1-n$，代入$k=m+n+1+j-m'-n'$，得$m'+k-1-m=n-n'+j$，$n'+k-1-n=m-m'+j$．因此$r_{m,n}$到其所在方块边缘的最矩距离为$\min\{m-m',n-n',m-m'+j,n-n'+j\}=d+\frac{j-|j|}{2}$．当$d+\frac{j-|j|}{2}=0$时，$r_{m,n}$位于方块边缘；$d+\frac{j-|j|}{2}>0$时，$r_{m,n}$位于方块内部．这样由定理 1 即得如下结论：

定理 2 设$T_{m,n}f=r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$，$Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$，$T_{m,n}$关于$z$平面上任何不含$z^{\frac{|j|-j}{2}}Q_{m,n}$的零点的有界闭域在$f$连续的充要条件是$r_{m,n}$位于所在方块的边缘．

参 考 文 献

［1］ G. A. Baker Jr., Essentials of Padé Approximants, Academic Press, London, 1975.

［2］ H. Werner and L. Wuytack, On the continuity of the Pade operator, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 20, No. 6, December 1983.

［3］ W. B. Gragg, The Padé table and its relations to certain algorithms of numerical analysis, SIAM Rev., 14(1972).

On the Conditions for the Continuity of the Padé Operator

Huang Youdu

(Hefei Polytechnic University)

Abstract

Let $r_{m,n}=P_{m,n}/Q_{m,n}$ be the Padé approximation of order (m,n) for a given power series f: $Q_{m,n}f-P_{m,n}=O(z^{m+n+1+j})$, j is as large as possible, m',n' are the exact degree of $P_{m,n}$ and $Q_{m,n}$ respectively and $d=\min\{m-m',n-n'\}$. Let $T_{m,n}$ be the operator that maps f on $r_{m,n}$. Then $T_{m,n}$ is continuous if and only if $d+\frac{j-|j|}{2}=0$. This condition is equal to that $r_{m,n}$ is on the border of a Padé block. The results obtained by H. Werner and L. Wuytack have been modified and corrected in this paper.