1988年2月

数学研究与评论
第八卷 第一期

关于反向适应序列的一些结果*

薛 行 鸿

(华东师范大学，上海)

§1 引 言

设X是Banach空间，$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上X值反向适应序列，即$(\mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是$\mathscr{F}$的单调不减子$\sigma$-代数列，$x_n$是$\mathscr{F}_n$强可测X值随机变量．$\Omega\to\{-1,-2,\cdots\}$的映照$t$称为停时，若$(t=n)\in\mathscr{F}_n$，$n\leqslant -1$．令T和$T^b$分别为停时和有界停时全体．已知$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$若是一致amart，则$(x_n)$ $a.s.$强收敛且$(x_\tau, \tau\in T^d)$是L^1收敛网[3]，[4]在刻划正向适应序列的$a.s.$收敛性时指出，用Ex_t的收敛性来刻划$a.s.$收敛性只局限于T^d是不充分的，在讨论反向适应序列的$a.s.$收敛性时，也需要考虑比一致amart更广的一类适应序列．本文引进T-一致amart类，它包含了一致amart类且保持$a.s.$收敛性，此外还讨论了T-一致amart的若干特征以及与$a.s.$强收敛的关系．

§2 T-一致amart

定义 设$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是X值适应序列，若存在$t_0\in T$，$\forall t\in T$，$t\leqslant t_0$，$E\|x_t\|<\infty$且$\lim\limits_{s\in T}\sup\limits_{s>t\in T}E\|x_t-E(x_s|\mathscr{F}_t)\|=0$，则称$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是T-一致amart．

引理 设$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是实值适应序列，若$\overline{\lim\limits_{t\in T}}|Ex_t|<\infty$，则$(x_t, t\in T)$尾部一致可积[5]．

证明易得，从略．

定理1 设$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是X值适应序列，则下列叙述等价：

(i) $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$是T-一致amart．

(ii) $\overline{\lim\limits_{t\in T}}E\|x_t\|<\infty$且$(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$强收敛，

(iii) $(x_t, t\in T)$是L_1收敛网，

(iv) $(x_n, n\leqslant -1)$有分解：$x_n=y+z_n$，其中y是关于$\mathscr{F}_{-\infty}\triangleq\bigwedge\limits_n\mathscr{F}_n$强可测的Bochner可积随机变量，$(z_n, n\leqslant -1)$满足$\lim\limits_{t\in T}E\|z_t\|=0$．且条件之一成立时有$\lim\limits_{t\in T}Ex_t=E\lim\limits_{n<-1}x_n$．

证 (i)$\Rightarrow$(iii)．$\forall\varepsilon>0$，取$t_0\in T$，使得$t\in T$，$t\leqslant t_0$时$E\|x_t\|<\infty$且$\sup\limits_{t_0>s>t\in T}E\|x_t-E(x_s|\mathscr{F}_t)\|<\varepsilon$，于是，$\forall t,s\in T$，$t\leqslant t_0$，$s\leqslant t_0$，有

$$E\|x_t-x_s\|\leqslant E\|x_t-E(x_{t_0}|\mathscr{F}_t)\|+E\|E(x_{t_0}|\mathscr{F}_t)-E(x_{t_0}|\mathscr{F}_s)\|+E\|E(x_{t_0}|\mathscr{F}_s)-x_s\|$$
$$<2\varepsilon+E\|E(x_{t_0}|\mathscr{F}_t)-E(x_{t_0}|\mathscr{F}_s)\| \qquad (1)$$

* 1984年4月9日收到．

因为对任意的递减停时刻列$(t_n)\subset T$，$(E(x_{t_0}|\mathscr{F}_{t_n}),\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 1)$是反向鞅，故$(E(x_{t_0}|\mathscr{F}_{t_n}),n\geqslant 1)$ L_1收敛[6]，由此知$(E(x_{t_0}|\mathscr{F}_{t_n}),t_0\geqslant t\in T)$是$L_1$收敛网，故有$s_0\in T,s_0\in t_0,\forall t,s\in T$当$t\leqslant s_0,s\leqslant s_0$时有

$$E\|E(x_{t_0}|\mathscr{F}_s)-E(x_{t_0}|\mathscr{F}_t)\|<\varepsilon. \tag{2}$$

于是$E\|x_t-x_s\|<3\varepsilon(s\leqslant s_0\leqslant t_0,\ t\leqslant s_0\leqslant t_0)$，因而$(x_t,t\in T)$是$L_1$收敛网.

(iii)$\Rightarrow$(iv). 令y是$(x_t,t\in T)$的L_1极限，则y关于$\mathscr{F}_{-\infty}$强可测且Bochner可积. 令$z_n=x_n-y$，则$\lim\limits_{t\in T}E\|z_t\|=0$，(iv)成立.

(iv)$\Rightarrow$(ii). (iv)成立时有$\overline{\lim\limits_{t\in T}}E\|x_t\|=\overline{\lim\limits_{t\in T}}E\|y+z_t\|\leqslant E\|y\|+\overline{\lim\limits_{t\in T}}E\|z_t\|<\infty$，只要证明$\lim\limits_n\|z_n\|=0\ \ a.s.$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists t_0\in T$使得$\sup\limits_{t_0>t\in T}E\|z_t\|<\varepsilon^2$，对$k\leqslant -1$令$s_k=\inf(n\geqslant t_0\Lambda k\ \|z_n\|>\varepsilon\}(\inf\{\phi\}=-1)$，易于验证$s_k\in T$且$s_k\geqslant t_0\Lambda k$，因而有

$$P(\sup_{n<-1}\|z_n\|I_{(t_0>n>t_0\Lambda k)}>\varepsilon)\leqslant P[(s_k\leqslant t_0)\cap(\|z_{s_k}\|>\varepsilon)]\leqslant\frac{1}{\varepsilon}E\|z_{s_k\Lambda t_0}\|<\varepsilon\ . \tag{3}$$

取$n_0\leqslant -1$，使$P(t_0<n_0)>\varepsilon$，于是有

$$P(\sup_{n>n_0}\|z_n\|>\varepsilon)\leqslant P(t_0<n_0)+P(\sup_{n<-1}\|z_n\|I_{(t_0>n)}>\varepsilon)$$
$$<\varepsilon+\lim_{k\to-\infty}P(\sup_{n<-1}\|z_n\|I_{(t_0>n>t_0\Lambda k)}>\varepsilon)<2\varepsilon\ ,$$

由ε的任意性知$\lim\limits_{n\to-\infty}\|z_n\|=0\ \ a.s.$.

(ii)$\Rightarrow$(i)、设(ii)成立，由引理知$(x_t,t\in T)$尾部一致可积，由$(x_n,n\leqslant -1)$ $a.s.$强收敛得$(x_t,t\in T)$ $a.s.$强收敛，故$(x_t,t\in T)$是L_1收敛网，从而有

$$\lim_{s\in T}\sup_{s\geqslant t\in T}E\|x_t-E(x_s|\mathscr{F}_t)\|\lim_{s\in T}\sup_{s>t\in T}E\|x_t-x_s\|=0\ \ ,$$

$(x_n,\mathscr{F}_n,n\leqslant -1)$是T-一致$amart$.

当条件之一成立时，由(iv)及(iv)$\Rightarrow$(ii)的证明即得

$$\lim_{t\in T}Ex_t=\lim_{t\in T}E(y+z_t)=Ey=E\lim_n x_n.$$

推论 {一致$amart$}$\subset${T-一致$amart$}.

§3 反向适应序列a.s.收敛的特征

定理 2 设$(x_n,\mathscr{F}_n,n\leqslant -1)$是X值可料适应序列，即$x_n$为$\mathscr{F}_{n-1}$强可测，$n\leqslant -1$. 则下述述条件等价：

(i) $(x_n,n\leqslant -1)$ $a.s.$强收敛于Bochner可积随机变量，

(ii) $(x_n,\mathscr{F}_n,n\leqslant -1)$是T-一致$amart$.

证 (ii)$\Rightarrow$(i)由定理1可得. 往证(i)$\Rightarrow$(ii)，设$(x_n,n\leqslant -1)$ $a.s.$强收敛于Bochner可积随机变量y，则y为$\mathscr{F}_{-\infty}$强可测. $\forall\varepsilon>0$，令$t_0=\inf\{n\leqslant -1,\|x_n-y\|>\varepsilon\}(\inf\{\phi\}=-1)$，因为$\lim\limits_n\|x_n-y\|=0\ \ a.s.$，故$t_0\in T$. 令$s_0=t_0-1$，因$(x_n,\mathscr{F}_n,n\leqslant -1)$是可料适应序列，$s_0\in T$，于是任给$t\in T$，当$t\leqslant s_0$时，$\|x_t-y\|\leqslant\varepsilon\ a.s.$，因而$E\|x_t-y\|\leqslant\varepsilon$，由$\varepsilon$的任意性知$(x_t,t\in T)$ L_1收敛于y，由定理1知(ii)成立.

对一般的反向适应序列，上述定理中的(i)和(ii)一般不等价(见§5的例2)，此时要附

加一定的条件，有下述命题：

定理 3 若 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是满足 $\lim\limits_{t\in T} E\|x_t\|<\infty$ 的X值适应序列，则 $(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$ 强收敛于Bochner可积随机变量的充要条件是 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是T-一致*amart*.

证 由定理1知充分性成立．现设 $(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$ 强收敛于 y，$E\|y\|<\infty$．$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)<\delta$ 时，$\int_A \|y\|dP<\varepsilon$，如定理1的证明，定义 $t_0=\inf\{n\leqslant -1, \|x_n-y\|>\varepsilon\}$，因 $\varliminf\limits_{t\in T} E\|x_t\|<\infty$，有 $s_0\in T$，$s_0\leqslant t_0$ $E\|x_{s_0}\|<\infty$．取 $n_0\leqslant -1$，使得 $P(s_0\leqslant n_0)<\delta$ 且有 $\int_{(s_0<n_0)}\|x_{s_0}\|dP<\varepsilon$，于是任给 $t\in T$，$t\leqslant s_0\wedge n_0$，因为在 $t<t_0$ 上有 $\|x_t-y\|\leqslant\varepsilon$ $a.s.$ 故

$$\begin{aligned}\int\|x_t-y\|dP &= \int_{(t=t_0)}\|x_t-y\|dP+\int_{(t<t_0)}\|x_t-y\|dP\\ &\leqslant \int_{(s_0<n_0)}(\|x_{s_0}\|+\|y\|)dP+\varepsilon<3\varepsilon\end{aligned}$$

因而 $(x_t, t\in T)$ L_1 收敛于 y，$(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是T-一致*amart*.

§4 实 值 情 形

对于实值适应序列 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$，有更精细的结果，先给出一组推广的Fatou型不等式．

定理 4 设 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是实值适应序列．

(i) 若 $E\varlimsup\limits_n x_n$ 和 $\varlimsup\limits_{t\in T} Ex_t$ 都有意义，存在 $t_0\in T$，$\forall t_0\geqslant t\in T$，$Ex_t^+$ 和 Ex_t^- 不同时为 ∞，则当 $\varliminf\limits_{t\in T} Ex_t^+<\infty$ 时有 $\varlimsup\limits_{t\in T} Ex_t\leqslant E\varlimsup\limits_n x_n$．

(ii) 若 $E\varliminf\limits_n x_n$ 和 $\varliminf\limits_{t\in T} Ex_t$ 都有意义，则当 $\varliminf\limits_{t\in T} Ex_t^-<\infty$ 时有 $\varliminf\limits_{t\in T} Ex_t\geqslant E\varliminf\limits_n x_n$．

证 (i) 当 $E\varlimsup\limits_n x_n=\infty$ 时结论为显然，故可设 $E\varlimsup\limits_n x_n<\infty$．先假定 $E|\varlimsup\limits_n x_n|<\infty$．$\forall\varepsilon>0$，令 $t_0=\inf\{n\leqslant -1, x_n\geqslant\varlimsup\limits_n x_n+\varepsilon\}$ $(\inf\{\phi\}=-1)$，则 $t_0\in T$，且 $\forall t\in T$，在 $t<t_0$ 上，$x_t<\varlimsup\limits_n x_n+\varepsilon$ $a.s.$，取 $\delta>0$ 使 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)<\delta$ 时，$\int_A|\varlimsup\limits_n x_n|dP<\varepsilon$，因 $\varliminf\limits_{t\in T} Ex_t^+<\infty$，有 $s_0\in T$，$s_0\leqslant t_0$，$Ex_{s_0}^+<\infty$．取 $n_0\leqslant -1$，使 $P(s_0\leqslant n_0)<\delta$，$\int_{(s_0<n_0)}x_{s_0}^+dP<\varepsilon$，于是对任意的 $t\in T$，当 $t\leqslant s_0\wedge n_0$ 时有

$$\begin{aligned}Ex_t &= \int_{(t<t_0)}x_t dP+\int_{(t=t_0)}x_t dP\leqslant\int_{(t<t_0)}(\varlimsup_n x_n+\varepsilon)dP+\int_{(s_0<n_0)}x_{s_0}^+dP\\ &< E\varlimsup_n x_n+\varepsilon+\int_{(s_0<n_0)}|\varlimsup_n x_n|dP+\varepsilon<E\varlimsup_n x_n+3\varepsilon,\end{aligned}$$

由此可推出 $\varlimsup\limits_{t\in T} Ex_t\leqslant E\varlimsup\limits_n x_n$．现在设 $E\varlimsup\limits_n x_n=-\infty$，对 $a\leqslant 0$，令 $x_n(a)=x_n\wedge a$，则 $\varlimsup\limits_n x_n(a)=(\varlimsup\limits_n x_n)\wedge a$．由前一段之证明有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{t\in T} Ex_t &\leqslant \lim_{a\to-\infty}\{\varlimsup_{t\in T} Ex_t(a)\}\leqslant\lim_{a\to-\infty}\{E\varlimsup_n x_n(a)\}\\ &= E\lim_{a\to-\infty}\varlimsup_n x_n(a)=E\varlimsup_n x_n=-\infty,\end{aligned}$$

结论仍成立．

(ii) 对 $(-x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 应用 (i) 即得

$$\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t = -\overline{\lim}_{t\in T} E(-x_t) \geqslant -E\overline{\lim}_{n}(-x_n) = E\underline{\lim}_{n} x_n .$$

推论 1 若 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是满足 $E\overline{\lim}_n x_n^+ (E\overline{\lim}_n x_n^-) < \infty$ 的实值适应序列，则 $\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^+ < \infty (\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^- < \infty)$ 等价于 $\overline{\lim}_{t\in T} Ex_t^+ < \infty (\overline{\lim}_{t\in T} Ex_t^- < \infty)$，并且这时 $\overline{\lim}_{t\in T} Ex_t$，$\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t$ 有意义.

推论 2 若 $(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$ 收敛且 $\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^+ + \underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^- < \infty$，则 $\lim_{t\in T} Ex_t$ 存在且 $\lim_{t\in T} Ex_t = E\lim_n x_n$，此时 $\lim_n$ 可积。

注 若 $x_n \leqslant z\ (z\in L_1)\ n\leqslant -1$，则容易证明对任意的 $(\mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$，$\overline{\lim}_n Ex_n \leqslant \overline{\lim}_{t\in T} Ex_t$，故上述不等式推广了经典的Fatou引理.

定理 5 对实值适应序列 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$，下述条件为等价：

(i) $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是T—一致 $amart$，

(ii) $\lim_{t\in T} Ex_t$ 存在且有限，

(iii) $\lim_{t\in T} Ex_t^+ + \lim_{t\in T} Ex_t^- < \infty$ 且 $(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$ 收敛，

(iv) $(x_n, n\leqslant -1)$ 有下述分解：$x_n = y + z_n$，其中 y 是 $\mathscr{F}_{-\infty}$ 可测可积变量，$\lim_{t\in T} E|z_t| = 0$，

(v) $(x_t, t\in T)$ 是 L_1 收敛网.

证 由定理 1 和定理 4 的推论 2，只要证明(ii) ⇒ (i) 即可. $\forall\ \varepsilon>0$，取 $t_0\in T$ 使得 $\sup_{\substack{t,s\in T\\ t\leqslant t_0,\ s\leqslant t_0}} |Ex_t - Ex_s| < \varepsilon$，$\forall\ t, s\in T$，$t_0 \geqslant s \geqslant t$，令

$$s' = \begin{cases} s, & \text{在}(x_t > E(x_s|\mathscr{F}_t))\text{上}, \\ t, & \text{反之}. \end{cases}$$

则 $E(x_t - E(x_s|\mathscr{F}_t))^+ = E(x_t - E(x_{s'}|\mathscr{F}_t)) = Ex_t - Ex_{s'} < \varepsilon$，由同样方法可证 $E(x_t - E(x_s|\mathscr{F}_t))^- < \varepsilon$，由此知 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 是T—一致 $amart$.

§5 例　　子

本节给出两个例子，例 1 说明对反向适应序列{一致 $amart$} 是{T—一致 $amart$} 的真子集，例 2 说明定理 3 和定理 5 中的条件 $\underline{\lim}_{t\in T} E\|x_t\| < \infty$ 和 $\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^+ + \underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^- < \infty$ 一般不可免去.

例 1 设 $(x_n, n\leqslant -1)$ 是实值随机变量序列，$E|x_n| \uparrow \infty$，且 $(x_n, n\leqslant -1)$ $a.s.$ 收敛于可积随机变量，令 $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}$，$n\leqslant -1$，则 $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 不是一致 $amart$，但是T—一致 $amart$.（见定理 2）.

例 2 设 $(A_n, n\leqslant -1)$ 是 Ω 的 $\mathscr{F}$ 可测分割，取实数列 $(a_n, n\leqslant -1)$ 使得 $a_n P(A_n) = (-1)^{n-1} n$. 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(A_n, A_{n-1}, \cdots)$，$x_n = a_n I_{A_n}$，$n\leqslant -1$，易知有 $\lim_n x_n = 0$ $a.s.$，但这时有 $\underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^+ = \underline{\lim}_{t\in T} Ex_t^- = \infty$. 事实上，$\forall\ t\in T$ 和 $k\leqslant -1$，设 $P[(t=m)\cap A_1] > 0$，取 $n\leqslant -1$，使得 $2n \leqslant m\wedge k$，由 $(\mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ 的定义知 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{2n}$ 是 $\mathscr{F}_{2n-1}$ 的原子，因为 $(t\geqslant 2n)\in \mathscr{F}_{2n-1}$，$(t\geqslant 2n) \supset [(t=m)\cap A_1]$，故 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{2n} \subset (t\geqslant 2n)$，于是有

$$Ex_{t\wedge 2n}^+ \geqslant Ex_{2n}^+ I_{(t\geqslant 2n)} \geqslant Ex_{2n}^+ I_{A_{2n}} = Ex_{2n}^+ > |2n|,$$

由此可推得$\overline{\lim\limits_{t\in T}} Ex_t^+ = \infty$，由定理 4 的推论 1 知$\underline{\lim\limits_{t\in T}} Ex_t^+ = \infty$，同样可证$\underline{\lim\limits_{t\in T}} Ex_t^- = \infty$.

参 考 文 献

[1] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.

[2] Edgar, G. A., Sucheston, L., Amarts: A class of asymptotic martingales, J.Multivariate Anal., 6(1976), 193—221.

[3] Choi, B. D., Sucheston, L., Continuous parameter uniform amarts, Lecture Notes in Math., 860(1981), 85—98.

[4] Bellow, A., Dvoretzky, A., A characterization of almost sure convergence, Lecture Notes in Math., 709(1979), 45—65.

[5] Krickeberg, K., Convergence of martingales with a directed index set, Trans.Amer.Math. Soc., 83(1956), 455—544.

[6] Chatterji, S.D., A note on the convergence of Banach-space valued martingales, Math. Ann., 153 (1964), 142—149.

Some results on reversed adapted sequences

Xue Xinghong

(East China Normarl University)

Let X bc a Banach space, $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ a X-valued adapted sequence on probability space $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Let T be all stopping times with respect to $(\mathscr{F}_n, n \leqslant -1)$. $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ is called a T-uniform amart if there exists a $t_0 \in T$ such that for each $t\in T$ with $t\leqslant t_0$, $E\|x_t\|<\infty$ and if $\lim\limits_{s\in T}\{\sup\limits_{s\geqslant t\in T} E\|x_t - E(x_s|\mathscr{F}_t)\|\} = 0$. In this paper we prove that.

Theorem 1 Let $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ be a X-valued adapted sequence, fhen the following are equivalent:

(i) $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ is a T- uniform amart;

(ii) $\lim\limits_{t\in T} E\|x_t\|<\infty$ and $(x_n, n\leqslant -1)$ Converges strongly *a.s.*;

(iii) $(x_n, n\leqslant -1)$ can be decomposed as $x_n = y + z_n$, where y is strongly measurable with respect to $\mathscr{F}_{-\infty} \triangleq \bigwedge\limits_{n\leqslant -1} \mathscr{F}_n$ and $E\|y\|<\infty$, and $\lim\limits_{t\in T} E\|z_t\| = 0$.

(iv) $(x_t, t\in T)$ is a L_1-convergent net,

Thus, a uniform amart $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ is a T- uniform amart.

Theorem 2 Suppose $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ is a X-valued predictable sequence. Then $(x_n, n\leqslant -1)$ converges strongly *a.s.* to a Bochner integrable *r.v.* if and only if $(x_n, \mathscr{F}_n, n\leqslant -1)$ is a T-uniform amart.