1988年5月

数学研究与评论
第八卷 第二期

Γ-环与广义Γ-环的强幂零根与拟强幂零根*

奚 欧 根

（宁 波 大 学）

陈维新在[1]中讨论了什么条件下的Γ-环的任一强诣零子环一定是强幂零子环？本文将利用这些结果进一步讨论，什么条件下的Γ-环必有强幂零根？也就是：什么条件下的Γ-环的所有强幂零理想之和仍是强幂零理想？回答是，具下列条件之一即可：①Noether条件，②Goldie条件，③左、右零化子升链条件，④左、右零化子降链条件，⑤左（或右）零化子升链和降链条件，⑥强幂零理想极大条件，⑦强幂零子环极大条件，⑧左（或右）零因子极大条件，⑨强诣零左（或右）理想极小条件，⑩Artin条件．本文还针对Γ-环的所有强幂零理想之和未必是强幂零理想的问题，提出了拟P理想的概念，这一概念是[2]中近似诣零理想概念的拓广．本文得到的关于拟P理想的主要结果是：任何Γ-环R都有拟P根I，且R/I是拟P半单Γ-环．这里，P表示Γ-环R可能有的代数性质．例如当P取强幂零性、局部幂零时，就分别有拟强幂零理想、拟局部幂零理想等概念和有关结果．本文仅讨论拟强幂零理想（其余概念及其性质另文讨论），结果是：Γ-环的强幂零理想一定是拟强幂零理想．这样，任给一Γ-环可能没有强幂零根，但一定有以所有强幂零理想之和为其子集的拟强幂零根，且若Γ-环有强幂零根，则强幂零根=拟强幂零根．

最后还验证了在广义Γ-环[1]中本文诸结果都能成立．于是，结合环中某些熟知结果都自然地成为本文相应结果的特款．

本文的许多概念都沿用[1]中有关定义．

§1 Γ-环的强幂零根

引理1.1 Γ-环R的任一强幂零单边理想必包含在R的一个强幂零双边理想中．

引理1.2 Γ-环R的两个、因而有限多个强幂零理想之和是强幂零理想．

引理1.3 如果I是Γ-环R的所有强幂零理想之和，且I也是强幂零的．那么I就是R的唯一最大的强幂零理想．

引理1.4 设I为Γ-环R的唯一最大的强幂零理想，则R/I不再有非零强幂零理想．

以上这些引理的证明，都可在[3]中找到．

定义1.1 称Γ-环R的唯一最大的强幂零理想为R的强幂零根，没有非零强幂零理想的Γ-环称为强幂零半单环．

引理1.5 Γ-环R的所有强幂零理想之和I是R的强诣零理想．

* 1985年9月23日收到．

如果这个 I 是强幂零的，则 I 就是R的唯一最大的强幂零理想.

由引理1.5及[1]的定理1.3（谢邦杰—Levitzki定理），便得.

定理1.1 若Γ-环R是左（右）Noether的，则R的所有强幂零理想之和仍是R的强幂零理想. 因而R存在强幂零根.

由引理1.5及[1]的定理1.4（Lanski定理）便得.

定理1.2 若Γ-环R是左（右）Goldie的，则R有强幂零根.

由引理1.5及[1]的定理1.2（谢邦杰定理）便有.

定理1.3 若Γ-环R对左、右零化子都适合升链条件，则有强幂零根.

在Γ-环中同结合环一样可证［2］中的定理10成立，即

引理1.6 （[2]，定理10）Γ-环R的左（右）零化子适合升链条件 ⇔ R的右（左）零化子适合降链条件.

于是，由引理1.6及定理1.3立得

定理1.4 若Γ-环R对左、右零化子都适合降链条件，则R有强幂零根.

定理1.5 若Γ-环R对左（或右）零化子适合升链条件和降链条件，则R有强幂零根.

下面的定理1.6不依赖于引理1.5及有关定理，可直接从强幂零性结论导出：

定理1.6 若Γ-环R对强幂零理想满足极大条件，则R的所有强幂零理想之和是强幂零理想，因而R有强幂零根.

证明 设W为R的所有强幂零理想组成的非空集（因$\{0\}\in W$），由极大条件，可设 I 为W的一个极大元，则 I 也是最大元. 事实上，W的每个元都含于I，因若设某强幂零理想$X\subsetneq I$，则$X+I\supset I$，但$X+I\in W$，此与 I 之极大性矛盾. 故R的所有强幂零理想之和N亦含于I，但 I 也是强幂零理想，故$I\subseteq N$，于是$I=N$. 即 I 为强幂零根.

由定理1.6立得

定理1.7 若Γ-环R对强幂零子环有极大条件，则R有强幂零根.

本定理也可根据引理1.5及[1]的定理1.1获得.

定理1.8 若Γ-环R对右零因子（或左零因子）满足极大条件，则R有强幂零根.

证明 设H为R的强幂零理想，若H的强幂零指数为$n+1$，则$[(H\Gamma)^{n-1}H]\Gamma H=\{0\}$，而$A=(H\Gamma)^{n-1}H\neq\{0\}$ 故对A中任一$a\neq 0$，$a\Gamma H=\{0\}$，故H为R的右零因子，于是R的所有强幂零理想的集合W是R的右零因子的一个子集：

$$\{\text{所有强幂零理想}\}\subseteq\{\text{所有右零因子}\}.$$

故R关于右零因子满足极大条件时，关于强幂零理想一定满足极大条件，于是由定理1.6立得本定理结论.（对于左零因子情形，类似可证）.

定理1.9 若Γ-环R对于强诣零右（左）理想适合极小条件，则R存在强幂零根.

证明 设R的所有强幂零理想之和为I（I当然是强诣零的），由极小条件，存在$k\in Z^{+}$，使

$$I\supseteq I\Gamma I\supseteq(I\Gamma)^{2}I\supseteq\cdots\supseteq(I\Gamma)^{k}I=(I\Gamma)^{k+1}I=\cdots$$

则必有$N=(I\Gamma)^{k}I=\{0\}$. 否则，作强诣零右理想非空集$W=\{X|X\Gamma N\neq\{0\},\ X\subseteq N\}$，（$N\in W$），设$N_0$为其极小元，故$\exists\, n_0\in N_0$，$n_0\Gamma N\neq\{0\}$，由$N_0$之极小性可得$n_0\Gamma N=N_0$，故有$\gamma\in\Gamma$，$n\in N$，$n_0=n_0\gamma n=\cdots=n_0\gamma[(n\gamma)^{k}n]=0$，矛盾. 故$N=\{0\}$，即I为R的强幂零根.

由定理1．9立得

定理1．10 若Γ-环R适合右（左）Artin条件，则R存在强幂零根．

最后，如果Γ-环R没有非零的强幂零理想，则R的所有强幂零理想之和当然是强幂零理想——{0}，即R存在强幂零根{0}．

§2 Γ-环的拟P根与拟强幂零根

定义2．1 设I是Γ-环R的Γ-理想(单边或双边)，如果对R中任意Γ-双边理想N, $I\subseteq N$，或当$I\nsubseteq N$时，$(I+N)/N$中必有R/N的非零的P理想（单边或双边），则称I为R的拟P理想．这里的P是Γ-环R可能具有的代数性质，如强幂零性，强诣零性等等．

当P取强幂零性时，就是拟强幂零理想．

关于拟P理想，有下列有趣结果：

定理2．1 Γ-环R的任一拟P单边理想必包含在R的一个拟P双边理想之中．

证明 设I为拟P左理想，(对拟P右理想则同样可证)，则I必在Γ-双边理想$K=I+I\Gamma R$中，如果$K\nsubseteq N$(N为R的Γ-双边理想)，则必$I\nsubseteq N$，由I之拟P性，$(I+N)/N$中必有R/N之非零P理想，设$\overline{S}$为其一，$\overline{S}$当然含于$(K+N)/N$中，故K为拟P双边理想．

定理2．2 对于任意一个Γ-环R，它的所有拟P理想S_i之和I一定仍是R的拟P理想，因而是R的唯一最大的拟P理想。

证明 若I不是拟P理想，则R中必有某Γ-双边理想N：$I\nsubseteq N$，且$(I+N)/N$中不含R/N的非零P理想．因$I\nsubseteq N$，故可设某$S_i\nsubseteq N$，由S_i是拟P理想，$(S_i+N)/N$中含有R/N之非零P理想，设$\overline{K}$为其一，于是$\overline{K}$含于$(I+N)/N$中，此与$(I+N)/N$中不含R/N之非零P理想矛盾．

定义2．2 称Γ-环R的唯一最大的拟P理想为拟P根，拟P根为零的Γ-环叫作拟P半单Γ-环．

定理2．3 设I为Γ-环R的唯一最大的拟P理想，则R/I不再含有非零的拟P理想，即R为拟P半单Γ-环．

先看一个引理：

引理2．1 设I为Γ-环R的非零拟P理想，则R/I的非零拟P理想$\overline{K}$在R中的完全原象K也是R的非零拟P理想．

证明 因$\overline{K}\neq\{\overline{0}\}$，故$I\subset K$，$K\neq\{0\}$，可证K是拟P理想，若设N为R的Γ-双边理想，且$K\nsubseteq N$，则①当$I\nsubseteq N$时，因I为R的拟P理想，故$(I+N)/N$中含有$R/N$的非零P理想，而$I\subset K$，故$(K+N)/N$中亦有$R/N$的非零P理想，即知K为R的非零拟P理想；②当$I\subseteq N$时，因$K\nsubseteq N$，故$(K+I)/I\nsubseteq N/I$，再由条件$\overline{K}=(K+I)/I$为$R/I$的非零拟P理想，故在$(K+N)/N$中含有$R/N$的非零P理想．即K亦为R的非零拟P理想．

定理2．3的证明 若R/I中还有非零拟P理想$\overline{K}\neq\{\overline{0}\}$，由引理2．1知，$\overline{K}$在$R\sim R/I$下的完全原象K是R的非零拟P理想．但I为R的拟P根，故$K\subseteq I$，$(K+I)/I=\{\overline{0}\}$，与$\overline{K}$非零的假设矛盾．故R/I为拟P半单Γ-环．

由于三个定理的证明中不涉及到P的具体性质，故当P取强幂零性时，就得到

定理2．1′ Γ-环R的任一拟强幂零单边理想必含在R的一个拟强幂零双边理想之中．

定理2.2′ 对于任一Γ-环R，它的所有拟强幂零理想之和一定仍是R的拟强幂零理想，因而是R的唯一最大的拟强幂零理想．它包含R的一切拟强幂零单边和双边理想．

定理2.3′ 设I为Γ-环R的唯一最大的拟强幂零理想，则R/I不含非零拟强幂零理想．

定义2.3 称Γ-环R的唯一最大的拟强幂零理想为R的拟强幂零根，拟强幂零根为零的Γ-环叫作拟强幂零半单环．

于是，任意一个Γ-环R，一定有拟强幂零根．且有

定理2.4 Γ-环R的强幂零理想一定是拟强幂零理想．

证明 若强幂零理想$I=\{0\}$，则对R的任意Γ-双边理想N，都有$\{0\}\subseteq N$，故$\{0\}$即为R的拟强幂零理想；若$I\neq\{0\}$，且不含于R的某Γ-双边理想N中：$I\nsubseteq N$，则$(I+N)/N\neq\{\overline{0}\}$，且因I之强幂零性，有$(I\Gamma)^kI=\{0\}$，于是，$[(I+N)\Gamma]^k(I+N)\subseteq N$，故$[(I+N)/N)\Gamma]^k((I+N)/N)=\{0\}$，故$(I+N)/N$中含有R/N的非零强幂零理想$(I+N)/N$，即I是拟强幂零理想．

由此知，如果Γ-环R有强幂零根，则强幂零根⩽拟强幂零根．否则，总有：

R的所有强幂零理想之和⊆拟强幂零根．

关于拟强幂零半单环，还有一个有趣性质：

定理2.5 Γ-环R是拟强幂零半单的⇔R是强幂零半单的．

证明 由定理2.4，强幂零理想必是拟强幂零理想，所以拟强幂零半单环必是强幂零半单环；反之，设R是强幂零半单的，且含有非零拟强幂零理想I，因$I\nsubseteq\{0\}$，由I之拟强幂零性知，I中必含R的非零强幂零理想，此与R为强幂零半单环的假设矛盾．

由此定理，可进一步得知：若Γ-环R有强幂零根，则强幂零根＝拟强幂零根．

§3 广义Γ-环中的强幂零根与拟强幂零根

根据[1]中广义Γ-环的定义，在广义Γ-环中重复§1的讨论可知，定理1.1到定理1.10在广义Γ-环中都是成立的，且由于一个结合环可以自然地被解释为广义Γ-环[1]，因而§1中的所有结果可认为是结合环中相应结论的自然推广．

§2中，拟P理想的概念也可在广义Γ-环中完全一样的定义，且由验证知§2中所有结果在广义Γ-环中也成立，故若以结合环代替Γ-环，以幂零性代替强幂零性，则§2的结果在结合环中全都成立．反之也可认为§2的结果是结合环中相应结果的自然推广．

注：在本文写作过程中，刘绍学教授和陈维新同志曾给予关心和帮助，在此谨向他们致谢．

参 考 文 献

［1］ 陈维新，Γ-环和广义Γ-环的强幂零性，数学研究与评论，4(1984)，4－9．
［2］ 谢邦杰，近似诣零理想与根，东北人民大学自然科学学报，1(1956)，31-49．
［3］ 池澄、徐忠明，关于Γ-环的幂零性问题，杭州大学学报，Vol.80，2(1981)，137－141．
［4］ 刘绍学，环与代数，科学出版社，1983．
［5］ T. S. Ravisankar and U. S. Shukle, Structure of Γ-rings, Pacific, J.Math., Vol.80, 2(1979), 537－559.