1988年5月

数学研究与评论
第八卷 第二期

拓扑分子格中与权有关的几个结果*

孙国正

（陕西师范大学，西安）

以经典拓扑学与不分明拓扑学为特款，王国俊于〔1〕和〔2〕中分别建立了有逆序对合对应的拓扑分子格与广义拓扑分子格理论，最近他更于〔3〕中把上述理论推广到了一般的完全分配格上．不过在这一大的框架之下，许多具体的理论尚未深入开展．本文将讨论拓扑分子格中涉及权的一些结果，给出了完全分配格中素元（分子）数目的几个估计式．

本文中L恒表示完全分配格，M表示L中的分子之集，即一切非零既约元之集．这时也把L记作L(M)，并称L(M)为分子格．为方便起见，以下给出本文要用到的若干基本概念．

定义1 设L(M)是分子格，$\eta\subset$L，η叫做L上的余拓扑，若$0,1\in\eta$且η对有限并以及任意交关闭．这时（L(M)$,\eta$）称为拓扑分子格，或简称为TML．设$\xi\subset\eta$，如果η的每个元都可表为ξ中元的交，则称ξ为η的基．当$a\nleq P\in\eta$时，称P为a的远域．a的远域全体之集用$\eta(a)$表示．

定义2 设（L，η）是TML，则称

$$W(\mathrm{L},\eta)=\min\{|\xi|\,\big|\,\xi\text{是}\eta\text{的基}\}$$

为（L，η）的权，有时也把它简记作W(L)．

定义3 设（L(M)$,\eta$）是TML，$a\in$M，ξ_a叫做在a处的局部基，如果$\xi_a\subset\eta(a)$且对任何$P\in\eta(a)$，有$Q\in\xi_a$使$P\leq Q$．对任何$a\in$M，令

$$\chi(a,(\mathrm{L},\eta))=\min\{|\xi_a|\,\big|\,\xi_a\text{是}a\text{处的局部基}\}$$
$$\chi((\mathrm{L},\eta))=\sup\{\chi(a,(\mathrm{L},\eta))\,|\,a\in\mathrm{M}\}$$

并称$\chi((\mathrm{L},\eta))$为(L$,\eta$)的特征，在不致混淆时，也把$\chi((\mathrm{L},\eta))$简记为χ(L)．

定义4 设（L(M)$,\eta$）是TML，$A\in$L，则η中一切包含（即大于）A的元之交叫A的闭包，记作A^-．

定义5 设（L$,\eta$）是TML，$A,B\in$L，A叫做在B中稠密，若$B\leq A^-$，当$B=1$时，A叫做稠密元．

定义6 设（L(M)$,\eta$）是TML，称

$d((\mathrm{L}(\mathrm{M}),\eta))=\min\{|A|\,\big|\,A\in\mathrm{L},A^-=1\}$（这里$|A|=\min\{|\varphi|\,\big|\,\varphi\subset\mathrm{M}$且$\vee\varphi=A\}$）为（L(M)$,\eta$）的密度．

定义7 设（L(M)$,\eta$）是TML．（i）若$a,b\in$M，当$a<b$时有$Q\in\eta(b)$使$a\leq Q$，则称（L(M)$,\eta$）是$\mathrm{T}_{\frac{1}{2}}$的；（ii）若任给$a,b\in$M，当$a\neq b$时存在$P\in\eta(a)$使$b\leq P$或存在$Q\in\eta(b)$使$a\leq Q$，则称（L(M)$,\eta$）是T_0的；（iii）若任给$a,b\in$M，当$a\nleq b$

* 1985年1月14日收到．

时，有$P\in\eta(a)$使$b\leq P$，则称$(L(M),\eta)$是T_1的；(iv)若任给$a,b\in M$，当$a\wedge b=0$时有$P\in\eta(a)$以及$Q\in\eta(b)$使$P\vee Q=1$，则称$(L(M),\eta)$是T_2的.

现在我们给出闭元表示定理.

定理1 如果$W((L,\eta))\leq c$，A是L中闭元，且A可表示为L中闭元族$\{F_s\}_{s\in S}$之交，那么存在$S_0\subset S$满足$|S_0|\leq c$，且$\bigwedge\limits_{s\in S_0}F_s=A=\bigwedge\limits_{s\in S}F_s$.

证明 取(L,η)的一个基ξ，满足$|\xi|=W((L,\eta))\leq c$. 设$\xi_0=\{P\in\xi\,|\,$存在$s\in S$使$F_s\leq P\}$，显然$|\xi|\leq c$，且对ξ_0中每个P，集合$\{s\in S\,|\,F_s\leq P\}$非空，故由选择公理知，存在选择函数$\sigma:\xi_0\longrightarrow S$，我们将证明$S_0=\sigma(\xi_0)$满足定理的要求.

事实上，因为$|S_0|=|\sigma(\xi_0)|\leq|\xi_0|\leq c$；又显然有$\bigwedge\limits_{s\in S}F_s\leq\bigwedge\limits_{s\in S_0}F_s$，若$\bigwedge\limits_{s\in S_0}F_s\nleq\bigwedge\limits_{s\in S}F_s$，那么存在$m\in M$，$m\leq\bigwedge\limits_{s\in S_0}F_s$，但$m\nleq\bigwedge\limits_{s\in S}F_s$，由此知，存在$s\in S$使$m\nleq F_s$，因$\xi$是基，所以存在$P\in\xi$，使$m\nleq P$且$F_s\leq P$，此即说明$P\in\xi_0$，故有$\sigma(P)\in S_0$，且$F_{\sigma(P)}\leq P$，由$m\nleq P$得$m\nleq F_{\sigma(P)}$，此与条件$m\leq\bigwedge\limits_{s\in S_0}F_s$矛盾！证毕.

基与权的关系如下：

定理2 如果$\{F_s\}_{s\in S}$是TML(L,η)的基，且$W(L)\leq c$，那么存在$S_0\subset S$使$\{F_s\}_{s\in S_0}$为一基，且$|S_0|\leq c$.

证明 若c有限，即存在自然数n使$W(L)=n$. 设$\{E_i\}_{i=1}^n$是η的一个基，显然任何E_i都不能用其余元E_j，$j\neq i$的交表示. 否则就有$W(L)<n$. 下面证$\{E_i\}_{i=1}^n$是$\{F_s\}_{s\in S}$的子集. 事实上，若存在i_0，$1\leq i_0\leq n$，使E_{i_0}不同于任何F_s，由$\{F_s\}_{s\in S}$是基，故存在$S_1\subset S$，使$E_{i_0}=\bigwedge\limits_{s\in S_1}F_s$，所以

$$E_{i_0}\leq F_s，且E_{i_0}\neq F_s,\quad s\in S_1. \tag{1}$$

又因为$\{E_i\}_{i=1}^n$是基，故任给$s\in S$，F_s可由$\{E_i\}_{i=1}^n$中元的交表示，而由(1)式知，F_s其实可用$\{E_i\}_{i\neq i_0}$中元的交表示，因此得知E_{i_0}可用$\{E_i\}_{i\neq i_0}$中元的交表示，与假设矛盾！即c有限时定理成立.

若c无限，取(L,η)的一个基$\{E_t\}_{t\in T}$，满足$|T|\leq c$，令$S(t)=\{s\in S\,|\,E_t\leq F_s\}$，由于$\{F_s\}_{s\in S}$是$(L,\eta)$的基，故$E_t=\bigwedge\limits_{s\in S(t)}F_s$，由定理1知，存在$S_0(t)\subset S(t)$满足

$$E_t=\bigwedge_{s\in S_0(t)}F_s\quad 且\ |S_0(t)|\leq c \tag{2}$$

取$\xi=\{F_s\}_{s\in S_0(t),t\in T}$，下面我们证明$\xi$是$\eta$的基.

因为$\{E_t\}_{t\in T}$是一个基，故(L,η)的任一闭元均可表为$\{E_t\}_{t\in T}$中一些元的交，而由(2)知，每个E_t又可为ξ中一些元的交，因此，(L,η)的任一闭元也可表为ξ中元素的交，即ξ是基. 令$S_0=\bigcup\limits_{t\in T}S_0(t)$，则因$|S_0(t)|\leq c$，$t\in T$及$|T|\leq c$，故$|S_0|\leq c\cdot c=c^2=c$，因此$S_0$即满足定理的要求.

对T_1拓扑分子格，其分子数目的估计如下：

定理3 设$(L(M),\eta)$是T_1 TML，则有$|M|\leq W(L)^{\chi(L)}$.

证明 设$\chi(L)=c$，ξ为η的基，且$|\xi|=W(L)$，对$a\in M$，由于$\chi(a,(L,\eta))\leq c$，所以存在$\zeta_a\subset\eta$，使ζ_a为a处的局部基，且$|\zeta_a|\leq c$．因ζ_a中每个元都可表为ξ中元的交，故存在$\xi_a\subset\xi$，使ξ_a为a处的局部基，且$|\xi_a|\leq|\zeta_a|\leq c$，因此由选择公理知，对每一个$a\in M$，可选定$\xi_a\subset\xi$使$\xi_a$为$a$处的局部基，且$|\xi_a|\leq c$．若$a,b\in M$，且$a\neq b$，不妨设$a\leq b$，由$T_1$性知M中任何元都是闭元[3]．所以$b\in\eta(a)$．由于$\xi_a$是$a$处的局部基，故存在$P\in\xi_a$使$b\leq P$，即$P\in\xi_a$且$P\notin\xi_b$，所以$\xi_a\neq\xi_b$，此即说明M中元一一对应于$\xi$中基数$\leq c$的子集$\xi_a$，故有$|M|\leq|\{\xi'\,|\xi'\subset\xi$，且$|\xi'|\leq c\}|\leq|\xi|^c=W(L)^{\chi(L)}$．证毕．

对T_0拓扑分子格，其分子数目有如下估计：

定理 4 设$(L(M),\eta)$是T_0拓扑分子格，则有$|M|\leq\exp W(L)$及$|M|\leq|\eta|$．

证明 设ξ是η的基，满足$|\xi|=W(L)$，对任何$a\in M$，取a在ξ中的远域全体$\xi(a)$与之对应，那么可证：若$a\neq b$，则$\xi(a)\neq\xi(b)$．

事实上，由$a\neq b$及T_0性易证$a\nleq b^-$或$b\nleq a^-$．由ξ为基可得

$$a^-=\wedge\{y\,|y\geq a,\ y\in\xi\},\quad b^-=\wedge\{x\,|x\geq b,\ x\in\xi\},$$

所以$a\nleq$某个$x\in\xi$，$x\geq b$或者$b\nleq$某个$y\in\xi$，$y\geq a$，即$x\in\xi(a)$，$x\notin\xi(a)$，故$\xi(a)\neq\xi(b)$．这说明M一一对应于ξ的互不相同的子集族$\{\xi(a)\}_{a\in M}$，因此$|M|\leq\exp|\xi|=\exp W(L)$．

下面证明$|M|\leq|\eta|$．作映射$f:M\longrightarrow\eta$，为$f(a)=a^-$．由于L是T_0的，故若$a,b\in M$且$a\neq b$，则有$a\nleq b^-$或$b\nleq a^-$，由此可得$a^-\neq b^-$，可见映射f是一一的，所以$|M|\leq|\eta|$．证毕．

注意 定理3、4中的分离性T_1、T_0不可少．因为在分明拓扑学中相应的结论所需要的的分离性T_1、T_0不可少，所以在更广泛的拓扑分子格中亦不可少．

下面将证明两个基数不等式．首先我们引入几个新的定义．

文〔1〕中曾给出了有逆序对合对应的分子格的子分子格的定义，不过那里的子分子格对逆序对合对应有所要求，下面我们将给出更广泛的拓扑分子格的子拓扑分子格的定义，其系统的讨论将在另文中给出．

设$(L(M),\eta)$是拓扑分子格，$A\in L$，$A\neq 0$．令$L_A=\{x\,|x\leq A,\ x\in L\}$，$M_A=M\cap L_A$，$\eta_A=\{P\wedge A\,|P\in\eta\}$，显然$L_A$是L的子完全分配格，$M_A$恰是$L_A$中分子全体，且$\eta_A\subset L_A$，$\eta_A$关于有限并、无限交关闭，$L_A$中最大、最小元均在$\eta_A$中，所以$(L_A(M_A),\eta_A)$成为一拓扑分子格．

定义 8 设$(L(M),\eta)$是拓扑分子格，$A\in L$．拓扑分子格$(L_A(M_A),\eta_A)$称为$(L(M),\eta)$的子拓扑分子格．

容易看出，这里的子拓扑分子格是一般拓扑中子空间的推广．

定义 9 设$(L(M),\eta)$是拓扑分子格，基数

$$hd(L)=\sup\{d(L_A(M_A),\eta_A)\,|A\in\eta,\ A\neq 0\}$$

称为$(L(M),\eta)$的遗传密度．

下面给出一般TML中闭元数目的估计

定理 5 对任意TML $(L(M),\eta)$都有$|\eta|\leq|M|^{hd(L)}$和$d(L)\leq W(L)$．

证明 设$c=hd(L)$，对任何$F\in\eta$，因为$d(L_F(M_F),\eta_F)\leq c$，故存在$N\subset M_F$，使

$(\overline{\vee N})_{\eta_A}=F$，且 $|N|\le c$，这里 $(\overline{\vee N})_{\eta_A}$ 意为 $\vee N$ 在（L，η）中取的闭包．对每个 $F\in\eta$，选定一个满足上面条件的 $N\subset M_F=M\cap L\subset M$，显然对不同的 F，所得到的N也不同，即 η 一一对应于M的一些基数 $\le c$ 的子集族，所以

$$|\eta|\le|\{N\mid N\subset M,\ |N|\le c\}|\le|M|^c=|M|^{hd(L)}.$$

下面证 $d(L)\le W(L)$．取 η 的基 ξ，且 $1\notin\xi$，$|\xi|=W(L)$，这是可以办到的，因为空集的下确界是最大元．对任何 $P\in\xi$，因为 $P\neq 1$，故存在 $m_P\in M$，使 $m_P\nleq P$，对每个 $P\in\xi$，选定一个这样的 m_P，并记 φ 为这种 m_P 之全体，令 $A=\vee\varphi$，则 $A^-=1$．事实上，若 $A^-\neq 1$，则由 ξ 为基知，存在 $P\in\xi$，使 $A^-\le P$，对应此 $P\in\xi$，有 $m_p\in\xi$，故 $m_P\le\vee\varphi=A$，所以 $m_P\le A\le A^-\le P$，此与 m_P 的取法矛盾！综上即知 $d(L)\le|\varphi|=|\xi|=W(L)$．证毕

最后我们给出一个与权有关的闭元数目的估计．首先给出一个定义．

在一般拓扑学中，一个空间（X，θ(X)）的遗传Lindelöf 数 hl(X) 是涉及到所有子空间的，但是 hl(X) 也可纯粹使用 θ(X) 来给出，事实上，容易证明下面的等式：

$$hl(X)=\sup_{\{U_s\}_{s\in S}\subset\theta(X)}\{\min\{|S_0|\mid\bigcup_{s\in S_0}U_s=\bigcup_{s\in S}U_s,\ S_0\subset S\}\}.$$

因此 hl(X) 亦可完全使用 c(X)(X的闭集全体) 表示，如：

$$hl(X)=\sup_{\{F_s\}_{s\in S}\subset c(X)}\{\min\{|S_0|\mid\bigcap_{s\in S_0}F_s=\bigcap_{s\in S}F_s,\ S_0\subset S\}\}.$$

因为在拓扑分子格中仅涉及到闭元，故最后这种形式易于推广到拓扑分子格中去，下面就给出由此推广的定义．

定义10 设（L(M)，η）是拓扑分子格，基数

$$\sup_{\{F_s\}_{s\in S}\subset\eta}\{\min\{|S_0|\mid\bigwedge_{s\in S_0}F_s=\bigwedge_{s\in S}F_s,\ S_0\subset S\}\}$$

称为（L，η）的遗传 Lindelöf 数，记作 hl(L)．

定理6 对任何TML（L(M)，η），有 $|\eta|\le W(L)^{hl(L)}$．

证明 设 ξ 是 η 的基，满足 $|\xi|=W(L)$，对任何 $F\in\eta$，有 $F=\wedge\{P\mid P\ge F,\ P\in\xi\}$．令 $hl(L)=c$，由定义10知：存在 $\xi_0\subset\xi$，使对任何 $P\in\xi_0$，有 $P\ge F$，且 $F=\wedge\{P\mid P\in\xi_0\}$ 及 $|\xi_0|\le c$．这说明 η 可一一对应于 ξ 的基数 $\le c$ 的子集族，因此

$$|\eta|\le|\{\xi_0\mid\xi_0\subset\xi,\ |\xi_0|\le c\}|\le|\xi|^c=W(L)^{hl(L)}.$$

在前面的讨论中，我们给出了在 T_1、T_0 或无分离性要求的几个估计式，它们不但是一般拓扑学中相应结果的推广，而且在形式上也与经典的结果相一致．但对于更强的分离性 T_2+T_1，传统的基数不等式就必须加以适当的改造，举例如下：取 L＝I，即单位区间，取自然序，令 $\eta=I$，则（L，η）成为一 T_2 且 T_1 的TML，L中每个非零元都是分子，当然1也是分子，所以 $d(L)=1$，显然 $|M|=|L|\nleq\exp\exp d(L)$，及 $|M|\nleq d(L)^{\chi(L)}$．这说明一般拓扑中，在 T_2 分离下两个最粗的估计式：$|X|\le\exp\exp d(X)$ 和 $|X|\le d(X)^{\chi(X)}$ 对一般的拓扑分子格而言不成立．进一步的工作我们将在另文中给出．

参 考 文 献

〔1〕王国俊，拓扑分子格（I），科学通报，28，18（1983），1089—1091.
〔2〕王国俊，广义拓扑分子格，中国科学，12（1983），1063—1017.
〔3〕王国俊，完全分配格上的点式拓扑（将发表）.
〔4〕Engelking, R., General Topology, Warsaw, 1977.

Solme Results Concerning Weight in Topological Molecular Lattices

Sun Guozheng

Abstract

In this paper, some results concerning weight are discussed in topological molecular lattices. Some formulas estimating the number of prime elements in completely distributive lattices are obtained.