1988年5月

数学研究与评论
第八卷 第二期

关于有理数幂分数部分的注记*

徐 广 善

(中国科学院数学研究所，北京)

熟知有理数幂分数部分的研究与华林问题有密切关系．1957年Mahler[4]证明了，对任意互素整数a, q满足$a>q>2$和任意$\varepsilon>0$，只有有限多个整数n使得

$$\|(\frac{a}{q})^n\|<e^{\varepsilon n}$$

成立．1975年Baker和Coates[2]得到有效性结果，他们证明了，存在有效可计算的常数k和$\eta(0<\eta<1)$，对所有自然数$n>k$，不等式

$$\|(\frac{a}{q})^n\|>q^{-\eta n}$$

成立，这里η很接近于1．1981年Beukers[3]在对有理数a/q加了一些限制的条件下，对〔2〕给出一些改进，他证明了，设自然数$N>1$，对所有自然数n，不等式

$$\|(1+\frac{1}{N})^n\|>\frac{1}{4}N^{-3/2}(8.4)^{-n}$$

成立．

在这个注记中，我们使用Legendre多项式构造Padè逼近，在比〔3〕较广的限制条件下得到类似〔3〕的结果，并且N的阶得到改进，同时我们还证明了有理数k次根分数部分的类似定理．进一步，我们还给出这些结果的p-adic类似．

§1 主要结果和引理

定理1 设y和r是给定的自然数，对任意自然数$k(\geqslant 2)$和N，并满足$N>r\geqslant 1$和$(r, N)=1$，我们有

$$\|(y+\frac{r}{N})^k\|>\frac{1}{18(y+1)}N^{-1}(362yr^2)^{-k}\ .$$

定理2 设r是给定的自然数，对任意自然数l, k和N，并满足$N>r\geqslant 1$，$k>l$和$(l, k)=(r, N)=1$，记$\theta=2.826$，我们有

$$\|(1+\frac{r}{N})^{l/k}\|>\frac{1}{10}N^{-1}(16\theta^{k+3}r^2)^{-k}\ .$$

定理3 在定理1的假设下，令$\varphi=4\theta(yN+r)$，$H=((y+\frac{r}{N})^k+1)(y\theta)^k$，$p$是素数．又设$|r|_p\leqslant p^{-\delta}$（$\delta$是一自然数）和$p^{2\delta}>\varphi$，我们有

* 1984年10月9日收到．

$$\left\| \left(y+\frac{r}{N} \right)^k \right\|_p > \frac{C}{(4\theta)^2 (y+1)^2} N^{-2}$$

这里
$$C=\begin{cases} \{2(y(y+2)\theta)^k\}^{-1}, & \text{当} p^{3\delta} > 2H\varphi \text{时;} \\ \{2(y(y+2)\theta)^k\}^{-\frac{2\delta\log p}{2\delta\log p-\log\varphi}} p^{\frac{\delta\log\varphi}{2\delta\log p-\log\varphi}} & \text{当} p^{3\delta} \leqslant 2H\varphi \text{时.} \end{cases}$$

注 $|\cdot|_p$表示规范了的p-adic赋值，$\|\cdot\|_p$表示$\|\cdot\|$的p-adic赋值.

定理4 在定理2的假设下，令$\varphi_1=4\theta^k(N+r)$，$H_1=(1+r/N)(2\theta)^k$，p是素数并且$p\nmid k$. 又设$|r|_p \leqslant p^{-\delta}$($\delta$为一自然数）和$p^{2\delta}>\varphi_1$，我们有

$$\left\| \left(1+\frac{r}{N}\right)^{l/k} \right\|_p > \frac{C_1}{64\theta^{2k}} N^{-2},$$

这里

$$C_1=\begin{cases} (4(2\theta)^k)^{-1}, & \text{当} p^{3\delta} > 2H_1\varphi_1 \text{时;} \\ (4(2\theta)^k)^{-\frac{2\delta\log p}{2\delta\log p-\log\varphi_1}} p^{\frac{\delta\log\varphi_1}{2\delta\log p-\log\varphi_1}} & \text{当} p^{3\delta} \leqslant 2H_1\varphi_1 \text{时.} \end{cases}$$

设Legendre多项式$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^n(1+x)^n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_{m+n}^n C_n^m x^m=\sum_{m=0}^{n} a_m(n)x^m$，其中$a_m(n)$是整数. 记$d_n(s,t)=[1,2,\cdots,sn+t]$.

引理1 设$k>n$，那么存在两个n次整系数多项式

$$A_n(Z)=-kd_n(1,k)y^k\sum_{m=0}^{n}\left\{a_m(n)(-y)^m\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j (k+j)^{-1}\right\}Z^{n-m},$$

$$B_n(Z)=kd_n(1,k)\sum_{m=0}^{m}\left\{a_m(n)\sum_{j=0}^{m}(-y)^{m-j}C_m^j(k+j)^{-1}(y+Z)^j\right\}Z^{n-m}$$

和

$$E_n(Z)=kd_n(1,k)(-1)^n C_{k-1}^n Z^{2n+1}\int_0^1 x^n(1-x)^n(y+Zx)^{k-(n+1)}\mathrm{d}x,$$

使得

$$A_n(Z)+B_n(Z)(y+Z)^k=E_n(Z) \tag{1}$$

成立. 同样，存在两个n次整系数多项式

$$C_n(Z)=-ld_n(k,l)\sum_{m=0}^{n}\left\{(-1)^m a_m(n)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j\left(j+\frac{l}{k}\right)^{-1}\right\}Z^{n-m},$$

$$D_n(Z)=ld_n(k,l)\sum_{m=0}^{n}\left\{(-1)^m a_m(n)\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j\left(j+\frac{l}{k}\right)^{-1}(1+Z)^j\right\}Z^{n-m}$$

和

$$F_n(Z)=ld_n(k,l)\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left(j-\frac{l}{k}\right)Z^{2n+1}\int_0^1 x^n(1-x)^n(1+Zx)^{\frac{l}{k}-(n+1)}\mathrm{d}x$$

使得

$$C_n(Z)+D_n(Z)(1+Z)^{\frac{l}{k}}=F_n(Z) \tag{2}$$

成立.

证明 只证明（1）式,（2）式证明完全类似. 由于

$$\int_0^1 x^m(y+zx)^{k-1}\mathrm{d}x = z^{-(m+1)}\sum_{j=0}^{m} C_m^j (j+k)^{-1}(-y)^m\{(-y)^{-j}(y+z)^{k+j}-(-1)^j y^k\},$$

于是

$$\begin{aligned}
&kd_n(1,k)z^{n+1}\int_0^1 P_n(x)(y+zx)^{k-1}\mathrm{d}x\\
&= kd_n(1,k)(y+z)^k\sum_{m=0}^{h} a_m(n)z^{n-m}\sum_{j=0}^{m}(-y)^{m-j}C_m^j(j+k)^{-1}(y+z)^j\\
&- kd_n(1,k)y^k\sum_{m=0}^{n} a_m(n)z^{n-m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C_m^j(j+k)^{-1}(-y)^m\\
&= A_n(z)+B_n(z)(y+z)^k
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_0^1 P_n(x)(y+zx)^{k-1}\mathrm{d}x = (-1)^n C_{k-1}^n z^n\int_0^1 x^n(1-x)^n(y+zx)^{k-(n+1)}\mathrm{d}x\ . \qquad \blacksquare$$

引理 2 我们有下面估计

$$|N^n A_n(\frac{r}{N})| < (4\theta(Ny+r))^n(y\theta)^k, \tag{3}$$

$$|N^n B_n(\frac{r}{N})| < (4\theta(Ny+r))^n\theta^k, \tag{4}$$

$$|N^n E_n(\frac{r}{N})| < r(yN+r)^{-1}(2\theta(y+\frac{r}{N}))^k\left(\frac{yN+r}{\theta r^2}\right)^{-n} \tag{5}$$

和

$$|N^n C_n(\frac{r}{N})| < (4\theta^k(N+r))^n(2\theta)^k, \tag{6}$$

$$|N^n D_n(\frac{r}{N})| < (4\theta^k(N+r))^n(2\theta)^k, \tag{7}$$

$$|N^n F_n(\frac{r}{N})| < rN^{-1}(2\theta)^k\left(1+\frac{r}{N}\right)^{1/k}\left(\frac{N}{\theta^k r^2}\right)^{-n}. \tag{8}$$

证明 只证明（3）,（4）和（5）式,（6）,（7）和（8）式的证明完全类似. 由引理 1，$A_n(Z)$ 可以改写成

$$A_n(Z) = -kd_n(1,k)y^k\sum_{m=0}^{n} a_m(n)(-y)^m Z^{n-m}\int_0^1(1-x)^m x^{k-1}\mathrm{d}x\ ,$$

$$|N^n A_n(\frac{r}{N})| \leqslant d_n(1,k)y^k r^n\sum_{m=0}^{m}|a_m(n)|\left(\frac{yN}{r}\right)^m\ .$$

由〔1〕知，$d_n(s,t) < \theta^{sn+t}$ 和 $P_n(-\frac{Ny}{r}) \leqslant (a(-\frac{r}{Ny}))^n$，其中 $a(Z) = \max\{|\frac{(1\pm\sqrt{1-z})^2}{Z}|\}$，于是 $a(-\frac{r}{Ny}) \leqslant \frac{4(Ny+r)}{r}$ 和 $|N^n A_n(\frac{r}{N})| < \theta^{n+k}(4(yN+r))^n y^k$，（3）式成立.（4）式的证明完全类似,

$$|N^n B_n(\frac{r}{N})| < d_n(1,k)r^n\sum_{m=0}^{n}|a_m(n)|\left(\frac{yN}{r}\right)^m < (4\theta(yN+r))^{n-k}.$$ 再由引理 1

$$|E_n(\frac{r}{N})| \leqslant kd_n(1,k)C_{k-1}^n\left(\frac{r}{N}\right)^{2n+1}\left(y+\frac{r}{N}\right)^{k-(n+1)}(2n+1)^{-1}\ ,$$

$$\left| N^n E_n\left(\frac{r}{N}\right) \right| < r(yN+r)^{-1}\left(2\theta\left(y+\frac{r}{N}\right)\right)^k\left(\frac{yN+r}{\theta r^2}\right)^{-n}.$$

引理 3 设 p 是素数，$(r,N)=1$ 和 $|r|_p \le p^{-\delta}$（δ为一自然数），我们有

$$\left|E_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p \le p^{-(2n+1)\delta}. \tag{9}$$

如果$p \nmid k$，我们有

$$\left|F_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p \le p^{-(2n+1)\delta}. \tag{10}$$

证明 只证明（9）式，(10）式的证明完全类似．由引理 1 和$\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$,

$$E_n(z) = kd_n(1,k)(-1)^n C_{k-1}^n z^{2n+1}\int_0^1 x^n(1-x)^n\left(\sum_{i=0}^{k-(n+1)} C_{k-(n+1)}^k y^{k-(n+1)-i}x^i\right)\mathrm{d}x,$$

$$E_n\left(\frac{r}{N}\right) = (-1)^n\frac{d_n(1,k)n!}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}\left(\frac{r}{N}\right)^{2n+1}\sum_{i=0}^{k-(n+1)} y^{k-(n+1)-i}C_{n+i}^n C_{n+k}^{2n+1+i}\left(\frac{r}{N}\right)^i$$

容易验证$\mathrm{ord}_p\frac{d_n(1,k)n!}{(k+1)\cdots(k+n)} \ge 0$，又 $|r|_p \le p^{-\delta}$，最后我们有

$$\left|E_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p \le p^{-(2n+1)\delta}.$$

引理 4 对所有整数$n \ge 0$，我们有关系式

$$A_n(z)B_{n+1}(z) - B_n(z)A_{n+1}(z) = a_n z^{n+1} \tag{11}$$

和

$$C_n(z)D_{n+1}(z) - D_n(z)C_{n+1}(z) = \beta_n z^{n+1}, \tag{12}$$

其中a_n和β_n是非零常数．

证明类似于〔1〕的引理 2．

§ 2 定理的证明

定理 1 和 2 的证明 先证明定理 1，首先设$N > 362yr^2$，$k \ge 2$，τ是满足下面关系式的整数

$$\left(\frac{yN+r}{\theta r^2}\right)^\tau < \left(2\theta\left(y+\frac{r}{N}\right)\right)^k \le \left(\frac{yN+r}{\theta r^2}\right)^{\tau+1}, \tag{13}$$

虽然$\tau \ge 0$，容易验证

$$\frac{\log(2\theta(y+r/N))}{\log\frac{yN+r}{\theta r^2}} < \frac{1}{2}$$

根据下面的要求，我们将取 n 是τ或者$\tau+1$，于是

$$n \le \tau+1 < \frac{k\log(2\theta(y+r/N))}{\log\left(\frac{yN+r}{\theta r^2}\right)} + 1 < \frac{1}{2}k + 1 < k.$$

设M是距离 $(y+r/N)^k$最近的整数，令

$$\epsilon = (y+r/N)^k - M. \tag{14}$$

$$A_n(\frac{r}{N})+B_n(\frac{r}{N})M=E_n(\frac{r}{N})-\epsilon B_n(\frac{r}{N}),$$

由引理4，选取 n 为 τ 或者 $\tau+1$ 可以使得

$$A_n(\frac{r}{N})+B_n(\frac{r}{N})M\neq 0,$$

于是

$$1\leq\left|N^n(A_n(\frac{r}{N})+B_n(\frac{r}{N})M)\right|\leq\left|N^nE_n(\frac{r}{N})\right|+|\epsilon|\left|N^nB_n(\frac{r}{N})\right|$$

由引理2和（13）式，我们有

$$\left|N^nB_n(\frac{r}{N})\right|<(4\theta(yN+r))^n\theta^k$$

$$\leq(4\theta(yN+r))\exp\left\{k\left[\frac{\log 4\theta(yN+r)}{\log\frac{yN+r}{\theta r^2}}\log(2\theta(y+\frac{r}{N}))+\log\theta\right]\right\}.$$

由于 $\frac{\log 4\theta(yN+r)}{\log\frac{yN+r}{\theta r^2}}\log(2\theta(y+\frac{r}{N}))$ 是 N 的递减函数和假设 $N>362yr^2$，所以

$$\frac{\log 4\theta(yN+r)}{\log\frac{yN+r}{\theta r^2}}\log(2\theta(y-\frac{r}{N}))+\log\theta$$

$$<\log\theta+\frac{1}{2}\log 1452\theta y^2r^2<\log 362yr^2,$$

于是

$$|\epsilon|(4\theta(yN+r))^n\theta^k\leq|\epsilon|(4\theta(yN+r))(362yr^2)^k.$$

再由引理2和（13）式，

$$\left|N^nE_n(\frac{r}{N})\right|<(2\theta(y+\frac{r}{N}))^kr(yN+r)^{-1}(\frac{yN+r}{\theta r^2})^{-n}\leq(\frac{yN+r}{\theta r^2})r(yN+r)^{-1}\leq\theta^{-1}$$

于是

$$|\epsilon|>\frac{1-\theta^{-1}}{4\theta(yN+r)(362yr^2)^k}\geq\frac{1}{18(y+1)(362yr^2)N}.$$

如果 $N\leq 362yr^2$，

$$\left\|(y+\frac{r}{N})^k\right\|>\frac{1}{N^k}>\frac{1}{(362yr^2)^k},$$

定理显然成立，定理1证完。

定理2的证明完全类似定理1，首先设 $N>4^{l/k^2+1}\theta^{k+2}r^2$，$\tau$ 是满足下面关系式的整数

$$(\frac{N}{\theta^kr^2})^\tau<(2\theta)^k(1+\frac{r}{N})^{l/k}\leq(\frac{N}{\theta^kr^2})^{\tau+1}.$$

设 M 是距离 $(1+\frac{r}{N})^{l/k}$ 最近的整数，令 $\epsilon=(1+\frac{r}{N})^{l/k}-M$，选取 n 为 τ 或者 $\tau+1$，使得

$$C_n(\frac{r}{N})+MD_n(\frac{r}{N})\neq 0$$

类似定理1的证明，我们有

$$\left|N^nD_n(\frac{r}{N})\right|<(4\theta^k(N+r))(16\theta^{k+2}r)^k$$

$$\left|N^nF_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|<\left(\frac{r}{N}\left(\frac{N}{\theta^k r^2}\right)<\theta^{-k}\le\theta^{-2}\quad(k\ge 2),\right.$$

$$|\epsilon|>\frac{1-\theta^2}{8(16\theta^{k+3}r^2)^kN}>\frac{1}{10(16\theta^{k+3}r^2)^kN}.$$

当$N\le 4^{l/k^2+1}\theta^{k+2}r^2$时，令$a=\left(1+\frac{r}{N}\right)^{l/k}$，类似Liouville代数数逼近定理的证明，容易验证

$$\|a\|>\frac{1}{N^l(a+1)^k}\ge\frac{1}{N^k(a+1)^k},$$

由于 $(a+1)^k\le 3^k$和$N^k\le(4^{l/k^2+1}\theta^{k+2}r^2)^k$，最后有

$$\|a\|>\frac{1}{(24\theta^{k+2}r^2)^k}>\frac{1}{(16\theta^{k+3}r^2)^k}.$$

定理2 证完.

定理3 和4 的证明 先证明定理3，按（14）式的定义

$$N^n\left(A_n\left(\frac{r}{N}\right)+B_n\left(\frac{r}{N}\right)M\right)=N^nE_n\left(\frac{r}{N}\right)-\epsilon N^nB_n\left(\frac{r}{N}\right).\qquad(15)$$

我们选取τ是使得

$$p^{(2\tau+1)\delta}>2H\varphi^\tau$$

成立的最小正整数，选取 n 为τ或者$\tau+1$使得

$$A_n\left(\frac{r}{N}\right)+B_n\left(\frac{r}{N}\right)M\neq 0,$$

令$W=N^n\left(A_n\left(\frac{r}{N}\right)+B_n\left(\frac{r}{N}\right)M\right)$，根据引理2 的（3）和（4）式，

$$|W|_p\ge|W|^{-1}>(2H\varphi^n)^{-1},$$

另一方面，由（15）式

$$|W|_p\le\max\left(\left|N^nE_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p,\quad|\epsilon|_p\left|N^nB_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p\right),$$

由（16）式和引理3 的（9）式知，

$$|W|_p>\left|N^nE_n\left(\frac{r}{N}\right)\right|_p,$$

于是

$$|\epsilon|_p\ge|W|_p>(2H\varphi^n)^{-1}.$$

如果$p^{\epsilon\delta}>2H\varphi$，由（16）式知$\tau$可取1，于是$n\le 2$，

$$|\epsilon|_p>(2H\varphi^2)^{-1}>\frac{1}{2(4\theta)^2(y+1)^2(y(y+2)\theta)^k}N^{-2}.$$

如果$p^{3\delta}\le 2H\varphi$，由$\tau\le\dfrac{\log 2Hp^{-\delta}}{\log\left(\frac{p^{2\delta}}{\varphi}\right)}+1$，

$$|\epsilon|_p>(2H\varphi^n)^{-1}\ge(2H\varphi^n)^{-1}\ge(2H\varphi^{\tau+1})^{-1}$$

$$\ge\frac{1}{(4\theta)^2(y+1)^2N^2}\{2(y(y+2)\theta)^k\}^{-\frac{2\delta\log p}{2\delta\log p-\log\varphi}}p^{\frac{\delta\log\varphi}{2\delta\log p-\log\varphi}}$$

定理3证完．定理4的证明完全类似定理3，只须在定理3的证明中取$\varphi=\varphi_1$，$H=H_1$．

参 考 文 献

〔1〕K.Alladi and M.L.Robinson,Legondre polynomials and irrationality,J.Reine Angew.Math., 318(1980).137—155.

〔2〕A.Baker and J.Coates,Fractional parts of powers of rationals,Math.Proc.Camb.Phil.Soc., 77(1975),269—279.

〔3〕F.Beukers,Fractional parts of powers of rationals,Math.Proc.Camb.Phil.Soc.,90(1981),13—20.

〔4〕K.Mahler,On the fractional parts of the powers of a rational number：Ⅱ,Mathematika, 4(1957),122—124.

A note on fractional parts of powers of rational numbers

Xu Guangshan

Abstract

In this note,we give the estimates of lower bounds for fractional parts of powers of rational numbers which slightly sharpen the earlier results〔3〕. We also discuss the fractional parts of kth roots of rational numbers and their p-adic analogues.

(from 206)

Theorem I.2

i. $$\det_{k\times k}\left|\begin{bmatrix} y \\ r_i+j\end{bmatrix} q^{\binom{r_i+j}{2}}\right| = q^{\binom{k+1}{3}+\sum_{i=1}^{k}\binom{r_i+1}{2}} \prod_{j=1}^{k} \frac{\begin{bmatrix} y+j-1 \\ r_j+j\end{bmatrix}}{\langle r_j+j+1\rangle_{k-j}} \Delta\ q^{r_1}, q^{r_2}, \cdots, q^{r_k})$$

ii. (Carlitz, 1967).

$$\det_{k\times k}\left|\begin{bmatrix} x+r_i+j \\ r_i+j\end{bmatrix}\right| = q^{2\binom{k+1}{3}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\begin{bmatrix} x+r_i+1 \\ r_i+i\end{bmatrix}}{\langle r_i+i+1\rangle_{k-i}} \Delta(q^{r_1}, q^{r_2}, \cdots, q^{r_k}).$$

Theorem I.3

i. $$\det_{k\times k}\left|\begin{bmatrix} x+r_i \\ n-j\end{bmatrix}\right| = q^{\binom{k}{2}(x-n)+2\binom{k+1}{3}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\begin{bmatrix} x+r_i \\ n-k\end{bmatrix}}{\langle n-k+1\rangle_{k-i}} \Delta(q^{r_1}, q^{r_2}, \cdots, q^{r_k})$$

ii. $$\det_{k\times k}\left|\begin{bmatrix} x+r_i \\ n-j\end{bmatrix} q^{\binom{r_i+j}{2}}\right| = q^{\binom{k+1}{3}+\sum_{i=1}^{k}\binom{r_i+1}{2}} \prod_{i=1}^{k} \frac{\begin{bmatrix} x+r_i \\ n-k\end{bmatrix}}{\langle n-k+1\rangle_{k-i}} (q^{r_1}, q^{r_1}, \cdots, q^{r_k}).$$

In addition, for $\bar{\lambda}\in \mathbf{N}_0^k$ we shall freely use the notations without explanation such as order ideal λ, hook length h_{ij}, content c_{ij}, $|\bar{\lambda}|$ and $n(\lambda)$, which can be refered to the monograph entitled as Symmetric Functions and Hall Polynomials due to Macdonald (1979).