关于多项式稳定性问题*

谢朗　谢琳

（辽宁师范大学，大连）

多项式稳定性判据的研究有着重要的实际意义．就代数判椐而言，古典的Routh-Hurwitz 判椐给出了相当完整的结果．但是这个判椐在处理高阶多项式时涉及相当大的计算量．所以时至今日，仍有许多新的判椐提出，不仅为了理论上的意义，且为使稳定性判定更为简便易行．本文就复系数多项式稳定性给出几个较为简明的必要条件；并利用这些结果改进了关于实系数稳定性的谢-聂判椐中的必要条件（〔1〕、〔2〕、〔3〕)．

先介绍两个定义．

定义1　两个首项系数都是正实数．分别为m与$m-1$次的实系数多项式$f_m(s)$与$f_{m-1}(s)$，若都只有单实根，分别记为$s_1,\cdots,s_m$与$s_1',\cdots,s_{m-1}'$，且相互交错排列

$$s_1<s_1'<s_2<\cdots<s_{m-1}'<s_m,$$

则称这两个多项式构成实耦．

定义2　设n次复系数多项式$f(s)$形如

$$s^n+(a_1+ib_1)s^{n-1}+(a_2+ib_2)s^{n-2}+\cdots+a_n+ib_n. \quad (1)$$

记

$$M(s)=\begin{cases} s^n+ib_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+ib_{n-1}s+a_n, & n\text{为偶}, \\ s^n+ib_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+ib_n, & n\text{为奇}, \end{cases}$$

$$N(s)=f(s)-M(s),$$

则称

$$\varphi(x)=\overline{i^n}M(ix)\text{ 与 }\psi(x)=\overline{i^{n-1}}N(ix) \quad (2)$$

为$f(s)$诱导的多项式偶．反之，对给定的n次与$n-1$次实多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$，称$C(\varphi,\psi)(s)=i^n\varphi(\bar{i}s)+i^{n-1}\psi(\bar{i}s)$ 为φ与ψ的合成多项式．

当$f(s)$的根的实部都是负数时，称$f(s)$为稳定多项式．不难看出$a_1>0$是$f(s)$稳定的必要条件．

为得到本文的主要结论需要几个引理．

引理1　由（1）给出的复系数多项式$f(s)$稳定的充分必要条件是由（2）给出的两个多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$构成实耦．

证明　$f(s)$的根全部落在复平面左半部的充分必要条件是$f(s)$沿虚轴所得的幅角增量$\triangle_{-\infty}^{+\infty}\arg f(s)=n\pi$，且是连续递增的．这等价于$\mathrm{Re}f(ix)$与$\mathrm{Im}f(ix)$在$x$递增变化时交替取得零值．不难验证，这又等价于$\varphi(x)$与$\psi(x)$构成实耦．

* 1985年6月18日收到．

设$f(s)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$仍是由（1）与（2）式给出，记$\psi(x)$除$\varphi(x)$所得的余式为$\xi(x)$．由广义Routh-Hurwitz 判椐（〔6〕、第十五章§18定理23）不难得到下面的；

引理 2 若复多项式$f(s)$稳定，则$\psi(x)$与$\xi(x)$的合成多项式$C(\psi,\xi)(s)$也是稳定的．

该结论是Routh-Hurwitz 定理证明过程中的较为直接的推论，证明从略．

当n为偶数时，由直接计算可得

$$C(\psi,\xi)(s)=a_1s^{n-1}+[(a_1a_2^{(1)}+b_1^{(1)}b_2)+ib_2]s^{n-2}+[a_3+i(a_1b_3^{(1)}-b_1^{(1)}a_3)]s^{n-3}+\cdots+[a_{n-1}+i(a_1b_{n-1}^{(1)}-b_1^{(1)}a_{n-1})]s+a_1a_n^{(1)}+b_1^{(1)}b_n+ib_n, \qquad (4)$$

其中

$$b_1^{(1)}=a_1b_1-b_2,\ a_2^{(1)}=a_1a_2-a_3,\cdots,\ b_{n-1}^{(1)}=a_1b_{n-1}-b_n,\ a_n^{(1)}=a_1a_n. \qquad (5)$$

当n为奇数，$C(\psi,\xi)(s)$的最后两项为

$$[(a_1b_{n-1}^{(1)}+b_1^{(1)}a_{n-1})+ib_{n-1})]s+a_n+i(a_1b_n^{(1)}-b_1^{(1)}a_n). \qquad (4')$$

定理 1 n次复系数多项式$f(s)$稳定，则下述不等式成立

$$b_k^2+a_{k-1}a_{k+1}>0,\quad a_k^2+b_{k-1}b_{k+1}>0\qquad(0<k<n)$$

其中$a_0=1$，$b_0=0$．

证明 由引理1，$f(s)$稳定则$\varphi(x)$与$\psi(x)$构成实耦，故$\varphi(x)$只有单实根．讨论n为偶数的情况（n为奇数时证明类似），这时

$$\varphi(x)=x^n+b_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-b_3x^{n-3}+\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}a_n$$

$\varphi(x)$的$n-k-1$次导函数$\varphi^{(n-k-1)}(x)$是$k+1$次多项式，当k为偶数时，

$$\varphi^{(n-k-1)}(x)=\frac{n!}{(k+1)!}x^{k+1}+\frac{b_1(n-1)!}{k!}+\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}}\Big[\frac{b_{k-1}(n-k+1)!}{2}x^2-a_k(n-k)!x-b_{k+1}(n-k-1)!\Big];$$

当k为奇数时$\varphi^{(n-k-1)}(x)$的最后三项是

$$(1)^{\frac{k+1}{2}}\Big[\frac{a_{k-1}\cdot(n-k+1)!}{2}x^2+b_k(n-k)!x-a_{k+1}(n-k-1)!\Big].$$

考虑后一种形式，因$\varphi^{(n-k-1)}(x)$无重根，b_k与a_{k+1}不同时为0．若$a_{k+1}=0$，自然有$b_k^2+a_{k+1}a_{k-1}=b_k^2>0$．若$a_{k+1}\neq0$，令$\hat{\varphi}(y)=y^{k+1}\varphi^{(n-k-1)}(\frac{1}{y})$，$\hat{\varphi}(y)$是$y$的$k+1$次多项式，且无重根．求$\varphi(y)$的$k-1$次导函数，可得二次式

$$\frac{(n-k-1)!(k+1)!a_{k+1}}{2}y^2+(n-k)!k!b_ky-\frac{(n-k+1)!(k-1)!}{2}.$$

这个二次式有互异的实根，因此判别式

$$(k!)^2[(n-k)!]^2b_k^2+(n-k+1)!(n-k-1)!(k+1)!(k-1)!a_{k+1}a_{k-1}>0,$$

整理得$b_k^2+a_{k+1}a_{k-1}\dfrac{(n-k+1)(k+1)}{(n-k)k}>0$，易知应有$b_k^2+a_{k+1}a_{k-1}>0$．

当k为奇数时，利用$\varphi^{(n-k-1)}(x)$，同法可得$a_k^2+b_{k+1}b_{k-1}>0$． 证毕．

在定理1与前述引理2的基础上还得到

定理 2 复系数多项式$f(s)$稳定，则多项式的每个相邻一次式$(a_k+ib_k)x+a_{k+1}+ib_{k+1}$是稳定的，即$a_ka_{k+1}+b_kb_{k+1}>0$．

证明 用归纳法证之．设结论对$n-1$次的稳定多项式成立．n次多项式$f(s)$由（1）

式给出．由引理2知$C(\psi,\xi)(s)=a_1s^{n-1}+[(a_1a_2^{(1)}+b_1^{(1)}b_2)+ib_2]s^{n-2}+\cdots$是稳定多项式．由归纳假设，对每个偶数$k$，$k<n$；有

$$a_{k+1}(a_1a_k^{(1)}+b_1^{(1)}b_k)+b_k(a_1b_{k+1}^{(1)}-b_1^{(1)}a_{k+1})>0.$$

将$b_{k+1}^{(1)}=a_1b_{k+1}-b_{k+2}$，$a_k^{(1)}=a_1a_k-a_{k+1}$代入（6）式，得$a_{k+1}a_1(a_1a_k-a_{k+1})+b_ka_1(a_1b_{k+1}-b_{k+2})>0$，整理即有$a_1(a_{k+1}a_k+b_kb_{k+1})-(a_{k+1}^2+b_kb_{k+2})>0$．由定理1知$a_{k+1}^2+b_kb_{k+2}>0$，因$f(s)$稳定，$a_1>0$，我们得到不等式

$$a_{k+1}a_k+b_kb_{k+1}>\frac{a_{k+1}^2+b_kb_{k+2}}{a_1}>0. \tag{7}$$

当k是小于n的奇数时，可得$a_k(a_1a_{k+1}+b_1^{(1)}b_{k+1})+b_{k+1}(a_1a_k^{(1)}-b_1^{(1)}a_k)>0$，整理即有$a_1(a_{k+1}a_k+b_{k+1}b_k)-(b_{k+1}^2+a_ka_{k+2})>0$．同样利用定理1的结论得所要的

$$a_{k+1}a_k+b_{k+1}b_k>\frac{1}{a_1}(b_{k+1}^2+a_ka_{k+2})>0. \tag{8}$$

注 由定理1及定理2的证明过程，可以看出，$f(s)$稳定则有（7）与（8）式的成立，它强于定理2的结论。

在若干文献中（〔2〕、〔4〕）关于实系数多项式稳定的必要条件有深入一步的结果：实系数多项式稳定，则其相邻的三次式稳定．但对于复系数多项式，却不能将定理2的结论再向前推进了．下面的例子表明，一个稳定的复系数多项式的相邻二次式也可能不稳定．

例 设$h(s)=(s+1+2i)^3$．它有一个二次相邻多项式$s^2+3(1+2i)s+3(1+2i)^3$．这个二次多项式的一个根的实部是$\sqrt{3}-\frac{3}{2}>0$．可见这个相邻二次式是不稳定的，但$h(s)$明显稳定．

下面我们利用上述结果讨论实系数多项式稳定的必要条件．设n次实系数多项式

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}\text{，其中}a_0=1. \tag{9}$$

记 $H(x)=a_0x^p+a_2x^{p-1}+a_4x^{p-2}+\cdots+a_{2k}x^{p-k}+\cdots,$ (10)

$G(x)=a_1x^{p-1}+a_3x^{p-3}+a_5x^{p-3}+\cdots,$ (11)

其中
$$p=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & n\text{为偶数，}\\[2mm] \dfrac{n+1}{2} & n\text{为奇数．}\end{cases}$$

引理3 若实系数多项式$F(x)$的系数都大于0，则$F(x)$稳定当且仅当由$H(x)$与$G(x)$合成的p次复系数多项式$C(H,G)(s)$是稳定的．

证明 由〔5〕p589Th13，$F(x)$稳定当且仅当$H(x)$与$G(x)$的根都是负实数且交错排列，由引理1知$C(H,G)(s)$是稳定的．反之，若$C(H,G)(s)$是稳定的，因$F(x)$的系数大于0，$H(x)$与$G(x)$的根不仅是交错排列的实根，且除去当n为奇数时$H(x)$有一零根外，$H(x)$与$G(x)$的根都是负数．同样由〔5〕知$F(x)$是稳定的．

定理3 实系数多项式$F(x)$稳定，则系数满足下述关系式：

（1）当$F(x)$的次数n是偶数时$a_ka_{k-1}-a_{k+1}a_{k-2}>c_k>0\quad 2\leqslant k<n$，

其中$c_k=\begin{cases}\dfrac{1}{a_1}(a_k^2-a_{k-2}a_{k+1}) & k=1(\mathrm{mod}\,2),\\[2mm] \dfrac{a_n}{a_{n-1}}(a_k^2-a_{k+1}a_{k-3}) & k=0(\mathrm{mod}\,2)；\end{cases}$

（2） n 为奇数时，$a_{2k}a_{2k+1}-a_{2k+2}a_{2k-1}>\max\{\frac{1}{a_1}(a_{2k+1}^2-a_{2k-1}a_{2k+2}),\ \frac{a_n}{a_{n-1}}(a_{2k}^2-a_{2k+2}a_{2k-2})\}$.

注 在〔3〕中所述关于实多项式稳定性的谢-聂判椐中的必要条件是 $a_k a_{k+1}-a_{k-1}a_{k+2}>0$．本文定理3的结论显然可以给出一个改进的判据．

证明 设 $H(x)$ 与 $G(x)$ 由（10）与（11）式给出．由定义可知 H 与 G 的合成多项式

$$C(H,G)(s)=i^pH(\bar{i}s)+i^{p-1}G(\bar{i}s)=s^p+(a_1+ia_2)s^{p-1}+\cdots+(a_{2k-1}i^{k-1}+a_{2k}i^k)s^{p-k}+(a_{2k+1}i^k+a_{2k+2}i^{k+1})s^{p-k-1}+\cdots.$$

因 $F(x)$ 稳定，由引理3，$C(H,G)(s)$ 稳定．由定理2证明中的（7）与（8）式，应有

$$\mathrm{Re}[(a_{2k-1}\bar{i}^{k-1}+a_{2k}\bar{i}^k)(a_{2k+1}i^k+a_{2k+2}i^{k+1})]>\frac{a_{2k+1}^2-a_{2k-1}a_{2k+3}}{a_1}>0.$$

整理即得 $a_{2k}a_{2k+1}-a_{2k-1}a_{2k+2}>\frac{1}{a_1}(a_{2k+1}^2-a_{2k-1}a_{2k+3})>0$.

另外，因 $F(x)$ 无零根，令 $b_i=\frac{a_{n-i}}{a_n}$，记 $F(y)=y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_{n-1}y+b_n$，则 $F(y)$ 也是稳定多项式．类似前面的讨论可得

$$b_{2k}b_{2k+1}-b_{2k-1}b_{2k+2}>\frac{1}{b_1}(b_{2k+1}^2-b_{2k-1}b_{2k+3})>0,$$

将 $b_i=\frac{a_{n-i}}{a_n}$ 代入上式，可得

i）$n=0(\mathrm{mod}2)$ 时 $a_{2k}a_{2k-1}-a_{2k+1}a_{2k-2}>\frac{a_n}{a_{n-1}}(a_{2k-1}^2-a_{2k+1}a_{2k-3})>0$；

ii）$n=1(\mathrm{mod}2)$ 时 $a_{2k}a_{2k+1}-a_{2k+2}a_{2k-1}>\frac{a_n}{a_{n-1}}(a_{2k}^2-a_{2k+2}a_{2k-2})>0$.

将上述不等式以统一的形式表出，即得定理结论．

参 考 文 献

〔1〕复旦大学，一般力学，上海科技出版社（1960），第四篇，第二章．

〔2〕聂义勇，多项式稳定性的一类新判椐，力学杂志，1976，№2，110—116．

〔3〕蒋卡林，谢-聂稳定判椐，信息与控制，第12卷（1983），第1期．

〔4〕Липатов, А.В., Соколов, Н.И., О Некоторых Достаточних Условиях Устойчивости и Неустойчивости Линейных Непрерывных Стачионарных систем, А.и.Т., 1978.9, 30—37.

〔5〕Гантмахер, Ф.Р.（柯召译），矩阵论，高等教育出版社，1955．

〔6〕陈秀东，复常系数线性系统稳定性判椐，信息与控制．1982 第3期．