类退化椭圆型方程的边值问题*

汤 国 桢

（浙 江 大 学， 杭 州）

在由光滑Jordan曲线$\partial\Omega$: $H(x, y)=0$围成的区域Ω中，考虑方程

$$\mathscr{L}(u)\equiv A_0H^{\alpha}u_{xx}+2B_0H^{\beta}u_{xy}+C_0H^{\gamma}u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0. \tag{1}$$

对$0<\lambda<1$，我们规定以$C^{m+\lambda}(\overline{\Omega})$表示$C^m(\overline{\Omega})$中其$m$阶导数在$\overline{\Omega}$上满足具有指数$\lambda$的Hölder条件的那些函数所成的类．我们假设：方程（1）的系数A_0、B_0、C_0、a、b、$c\in C$ $C^{\lambda}(\overline{\Omega})$，$H\in C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$，并且$c\le 0$，常数$\alpha$、$\beta$、$\gamma>0$．不妨设在$\Omega$中$H(x, y)>0$，而在$\partial\Omega$上$A_0$、$B_0$、$C_0$均不恒为零．

假设在Ω中$B_0^2H^{2\beta}-A_0C_0H^{\alpha+\gamma}<0$，即方程是椭圆型的． 由假设可知$2\beta\ge\alpha+\gamma$．显然，方程（1）在整个边界$\partial\Omega$上呈退化．而以往的许多工作，如丁正中[1]和他的文献中指出的工作，都是考虑在局部直线段边界上呈退化的情况．

我们将讨论Dirichlet问题：$u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，满足方程（1）与

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi, \tag{2}$$

其中$\varphi\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$；或者E问题：$u\in C^2(\Omega)$，满足方程（1）与$u|_{\partial\Omega}$有界．

我们还假设$A_0|_{\partial\Omega}\ne 0$，$C_0|_{\partial\Omega}\ne 0$， （3）

并且当$2\beta=\alpha+\gamma$时 $B_0^2-A_0C_0|_{\partial\Omega}<0$， （4）

设 $$n=\frac{\alpha+\gamma}{2}. \tag{5}$$

首先我们讨论Dirichlet问题适定的情况．

定理1 如果满足下列条件之一：

（i）$0<n<1$，

（ii）$n=1$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}<A_0H^{\alpha-1}H_x^2+2B_0H^{\beta-1}H_xH_y+C_0H^{\gamma-1}H_y^2|_{\partial\Omega}$，

（iii）$1<n<2$，$|\alpha-\gamma|<2$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}\le 0$；

（iv）$n>1$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}<0$，

则定解问题（1），（2）的解存在而且唯一．

证明 将$\varphi(x, y)$连续拓展到$\overline{\Omega}$．任取递减趋于零的正数序列$\{\eta_n\}$，以下简记η_n为η，作边界光滑的区域序列Ω_η，满足 $\overline{\Omega}_\eta\subset\Omega$，

$$\Omega_{\eta_1}\subset\Omega_{\eta_2}\subset\Omega_{\eta_3}\subset\cdots\cdots,\quad \bigcup\Omega_\eta=\Omega,$$

在Ω_η中求方程（1）的解u_η，使满足边界条件

* 1985年1月4日收到．

$$u_\eta\big|_{\partial\Omega}=\varphi. \tag{6}$$

根据〔2〕的结果，解u_η为存在，且$|u_\eta|\le K\max\limits_{\overline{\Omega}}|\varphi|$.

运用对角线法，可以找到$\{u_\eta\}$的一个子列，不妨仍记为$\{u_\eta\}$，使$u_\eta\xrightarrow{C^2(\Omega)}u$，由此，所得极限函数$u(x, y)$满足方程（1）.

我们再证极限$u(x, y)$满足方程边界条件（2）. 为此只要对$\partial\Omega$上任一固定点$P_0(x_0, y_0)$，在其充分小邻域$\omega_{P_0}=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho^2\}\cap\Omega$中作出满足下列条件的闸函数$U(x, y)$即可：

$$1)\ U(x, y)\in C(\overline{\omega_{P_0}}), \tag{7}$$

$$2)\ U(x_0, y_0)=0, \tag{8}$$

$$3)\ \text{在}\omega_{P_0}\setminus P_0\text{上}, U(x, y)>0, \tag{9}$$

$$4)\ \text{在}\omega_{P_0}\text{上}, \mathscr{L}(U)\le -K_0<0, \text{其中}K_0\text{为常数}. \tag{10}$$

因为当存在这种闸函数$U(x, y)$时，对任给的$\varepsilon>0$，取正数$\rho'<0$. 使得$P\in\omega'_{P_0}=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\rho'^2\}\cap\Omega$时，

$$|\varphi(P)-\varphi(P_0)|<\varepsilon. \tag{11}$$

对于已取定的ρ'，可在ω'_{P_0}中证明在P_0点$u(x, y)$取边值. 为此考虑

$$W=MU(P)+\varepsilon\pm[u_\eta-\varphi(P_0)].$$

由于在$\omega'_{P_0}\cap\Omega$的圆周边界上$U(x, y)>0$，取$M=M(\rho')$适当大，使得在$\omega'_{P_0}\cap\Omega_\eta$的圆周边界上$W>0$. 又在$\omega'_{P_0}\cap\Omega_\eta$的$\partial\Omega_\eta$边界上，由（6），（8），（9），（11）可知$W>0$. 并且在$\omega'_{P_0}\cap\Omega_\eta$中由（10）有

$$\mathscr{L}(W)=C[\varepsilon\pm\varphi(P_0)]+M\mathscr{L}(U)<0$$

因此W不在$\omega'_{P_0}\cap\Omega_\eta$中取负最小值. 总上可知

$$MU(P)+\varepsilon\pm[u_\eta-\varphi(P_0)]>0$$

即

$$|u_\eta-\varphi(P_0)|\le MU(P)+\varepsilon$$

令$\eta\to 0$，$P\to P_0$以及$\varepsilon>0$的任意性可知极限函数$u(x, y)$满足（2）.

我们考虑函数$U=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+H^\delta$，

其中$0<\delta<1$，显然U满足（7）、（8）和（9），而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(U)=&\ \delta(\delta-1)H^{\delta+n-2}(A_0H^{\alpha-n}H_x^2+2B_0H^{\beta-n}H_xH_y+C_0H^{\gamma-n}H_y^2)+2A_0H^\alpha+\delta A_0H^{\alpha+\delta-1}H_{xx}\\&+2\delta B_0H^{\beta+\delta-1}H_{xy}+2C_0H^\gamma+\delta C_0H^{\gamma+\delta-1}H_{yy}+2[a(x-x_0)+b(y-y_0)]+\delta H^{\delta-1}(aH_x\\&+bH_y)+c[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+H^\delta]\end{aligned}$$

由（3）、（4）、（5）以及H_x、H_y在$\partial\Omega$上不同时为零可知当初把ω_{P_0}取得适当小的话可使$\overline{\omega}_{P_0}$上

$$A_0H^{\alpha-n}H_x^2+2B_0H^{\beta-n}H_xH_y+C_0H^{\gamma-n}H_y^2>0.$$

因此，（i）$0<n<1$时，取$0<\delta<1$；（ii）$n=1$时，取$0<\delta<\min\left(1,\ 1-\dfrac{aH_x+bH_y}{A_0H^{\alpha-1}H_x^2+2B_0H^{\beta-1}H_xH_y+C_0H^{\gamma-1}H_y^2}\right)$；（iii）$1<n<2$，$|\alpha-\gamma|<2$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}\le 0$时，取$0<\delta<2-n$；（iv）$n>1$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}<0$时，取$0<\delta<1$. 注意到各自相

应的条件以及 $0<n\leq 1$ 时自然有 $|\alpha-\gamma|<2$ 成立．所以在P_0点的充分小邻域ω_{P_0}上就有 $\mathscr{L}(U)\leq -K<0$ 这即证明了定解问题（1）、（2）的解的存在性．而由u_η一致有界，不难说明解还是唯一的．定理证毕．

我们再讨论E问题适定的情况

定理2 如果满足下列条件之一：

（i） $n\geq 1$，$\alpha\neq\gamma$。$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}>A_0H^{\alpha-n}H_x^2+2B_0H^{\beta-n}H_xH_y+C_0H^{\gamma-n}H_y^2|_{\partial\Omega}$,

（ii） $n=\alpha=\gamma=1, aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}\geq A_0H_x^2+2B_0H^{\beta-1}H_xH_y+C_0H_y^2|_{\partial\Omega}$, （12）

（iii） $n>1$，$\alpha,\gamma>1$，$aH_x+bH_y|_{\partial\Omega}>0$，

则当$c\leq 0$，$c\not\equiv 0$ 时，方程（1）的E问题有唯一的解$u\equiv 0$；当 $c\equiv 0$ 时，上述定解问题的解为$u=\text{const}$.

证明 存在性是明显的．

当 $c\leq 0$，$c\not\equiv 0$ 时，为了证明解的唯一性，我们只要作出满足下列条件的闸函数$W(x, y)$ 即可：

$$1)\quad (x,\ y)\in\Omega\text{时},\ W(x,\ y)>0, \tag{13}$$

$$2)\quad (x_0,\ y_0)\in\partial\Omega\text{时},\ \lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} W(x,\ y)=+\infty \tag{14}$$

$$3)\ W(x,\ y)\in C^2(\Omega),\ \text{且}\ \mathscr{L}(W)<0. \tag{15}$$

因为当存在这种闸函数时，如果 u 为方程（1）的E问题的解．我们对任意$\varepsilon>0$，可考虑$\varepsilon W\pm u$，由于（14）及 u 一致有界，所以可取到充分小的正数η，使$\partial\Omega_\eta$上$\varepsilon W\pm u>0$，而在Ω_η内 $\mathscr{L}(\varepsilon W\pm u)=\varepsilon\mathscr{L}(W)<0$，所以在$\Omega_\eta$内$\varepsilon W\pm u\geq 0$，即 $|u|\leq\varepsilon W$．令$\eta\to 0$，$\varepsilon\to 0$，可知在Ω内$u\equiv 0$．

下面我们即要作出这种闸函数．因为 $c\leq 0, c\not\equiv 0$，所以至少存在一点（x_1，y_1）$\in\Omega$，使$c(x_1,\ y_1)<0$．首先对函数$H(x,\ y)$，利用软化子可以作函数$\omega(x,\ y)$，使满足：

1）在Ω内的$\partial\Omega$的邻域Ω_2上，$\omega(x,\ y)=H(x,\ y)$， （16）

2）$\omega(x,\ y)\in C^2(\Omega)$，

3）除（x_1，y_1）外，ω_x，ω_y不同时为零． （17）

我们取$W=-\ln H(x,\ y)-(M+\omega)^N+K$,

其中M、N、K为充分大的正数．取M使在$\overline{\Omega}$上$M+\omega>1$． （18）

显然，（14）成立．而对下面取定N后再可取K充分大，使（13）也成立．又

$$\mathscr{L}(W)=\frac{-(aH_x+bH_y)+H^{n-1}(A_0H^{\alpha-n}H_x^2+2B_0H_xH_y+C_0H^{\gamma-n}H_y^2)}{H}\mp(A_0H^{\alpha-1}H_{xx}$$
$$+2B_0H^{\beta-1}H_{xy}+C_0H^{\gamma-1}H_{yy})-N(M+\omega)^{N-2}[(N-1)(A_0H^\alpha\omega_x^2+2B_0H^\beta\omega_x\omega_y+C_0H^\gamma\omega_y)$$
$$+(M+\omega)(A_0H^\alpha\omega_{xx}+2B_0H^\beta\omega_{xy}+C_0H^\gamma\omega_{yy})+a\omega_x+b\omega_y]+c[-\ln H-(M+\omega)^N+K] \tag{19}$$

由于$c(x_1y_1)<0$，所以存在（x_1，y_1）的邻域Ω_1，使（x，y）$\in\overline{\Omega}_1$时$c(x,\ y)<0$．又由（12）可知，能把Ω_2取得适当小，使（x，y）$\in\Omega_2$时$aH_x+bH_y>0$，故由（12）、（16）、（19）可知，当初还可把Ω_2取得适当小，并取N充分大，使在Ω_2上$\mathscr{L}(W)<0$，而在$\Omega_1\setminus\Omega_2$上，由（17）、（18）、（19）可知．当取$N$充分大时，$\mathscr{L}(W)<0$，再取$K$充分大，可使$\Omega_1$上也有$\mathscr{L}(W)<0$．这即证明了$W(x,\ y)$ 也满足（15）.

当 $c\equiv 0$ 时，设 u 是方程（1）的E问题的解．令 $U(x, y)=u(x, y)-u(x_1, y_1)$．显然我们只要证明对任何 (x_0, y_0) Ω, $U(x_0, y_0)=0$．

其实，对任意正数 $\varepsilon>0$ 和 $\varepsilon_1>0$，因为 $U(x_1, y_1)=0$，所以存在 (x_1, y_1) 的充分小邻域 Ω_1，使 $(x, y)\in\Omega_1$ 时，$|U(x, y)|<\varepsilon_1$，并且 $(x_0, y_0)\overline{\in}\overline{\Omega_1}$，显然在 $\Omega\setminus\Omega_1$ 中函数 $W(x, y)$ 满足 (13)、(14)、(15)．

考虑 $\Phi=\varepsilon W(x, y)+\varepsilon_1\pm U(x, y)$，由 (14) 及 U 一致有界可知，存在充分小的正数 η，使 $\Phi|_{\partial\Omega_\eta}>0$．显然 $\Phi|_{\partial\Omega_1}>0$，又 $\Omega_\eta\setminus\Omega_1$ 中 $\mathscr{L}(\Phi)=\varepsilon\mathscr{L}(W)<0$，由极值原理可知 $\Omega_\eta\setminus\Omega_1$ 中 $\Phi(x, y)>0$，特别 $\Phi(x_0, y_0)=\varepsilon W(x_0, y_0)+\varepsilon_1\pm U(x_0, y_0)>0$，即 $|U(x_0, y_0)|\leq\varepsilon W(x_0, y_0)+\varepsilon_1$．令 $\varepsilon\to 0$，$\varepsilon_1\to 0$ 即有 $U(x_0, y_0)=0$．定理2证毕．

参 考 文 献

〔1〕丁正中，一类半线性二阶退化椭圆型方程的一般边值问题，数学学报，2(1984)，177—191.

〔2〕D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Springer-Verlag, 1977.

On Boundary Value Problems of Degenerate Elliptic Equation

Tang Guozhen

(Zhejiang University)

Abstract

In this paper we consider an elliptic equation $\mathscr{L}(u)=A_0H^{\alpha}u_{xx}+2B_0H^{\beta}u_{xy}+C_0H^{\gamma}u_{yy}+au_x+bu_y+cu=0$ (1)

in a bounded damain Ω with boundary $\partial\Omega$: $H(x, y)=0$. We assume: α, β, $\gamma>0$, $c\leq 0$, $H(x, y)>0$ in Ω, and $B_0^2H^{2\beta}-A_0C_0H^{\alpha+\gamma}<0$, i.e. (1) is elliptic equation.

We have proved an existence and uniqueness theorem for boundary value problem of

$$\begin{cases}(1),\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi,\end{cases}\quad\text{or}\quad\begin{cases}(1),\\ u|_{\partial\Omega}=O(1),\end{cases}$$ if the coefficients of (1) satisfy some conditions.