1988年 5 月

数学研究与评论
第八卷 第二期

Gevrey 函数类和超分布中的Paley—Wiener型定理及其应用*

陈 化

（武 汉 大 学）

众所周知，Paley-Wiener定理深刻地刻画了具紧支集的无穷可微函数及具紧支集的分布同它们的Fourier-Laplace变换之间的关系，建立了具紧支集的无穷可微函数或分布同指数型整函数之间的关系．正因为如此，Paley-Wiener定理在数学中、特别是在偏微分方程的C^∞理论中起着相当重要的作用．本文在具紧支集的Gevrey函数类及具紧支集的超分布中考虑同样类型的定理，称之为Paley-Wiener型定理．

〔1〕中指出：Gevrey函数空间与Гельфанд-Шилов〔2〕中的S^β函数空间是一致的，而且S^β函数空间是Gevrey函数空间的子空间．作为Paley-Wiener型定理的一个应用，本文§3中证明了具紧支集的Gevrey函数空间与具紧支集的S^β函数空间是一致的．

§1 预备知识

为了避免本文的过分冗长，这里仅列举出本文所需要的一些关于Gevrey函数类及超分布的基本概念和结果，欲知其详，可参阅小松彦三郎〔3〕、〔4〕、〔5〕及Roumieu〔6〕

设Ω为$\mathbf{R}^n$内开集，$s>1$为任意实数．

定义1.1 若$f\in C^\infty(\Omega)$，且对任意的紧子集$K\subset\Omega$，存在着常数c、A，使得

$$(1.1)\qquad \sup_{x\in K}|D^\alpha f(x)|<CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s\quad \forall\alpha\in\mathbf{Z}_+^n,$$

成立，则称f为Ω上的s-Gevrey函数。所有Ω上的s-Gevrey函数构成一函数空间，称为Ω上的s-类Gevrey函数空间，简记为$G^s(\Omega)$．

记$G_0^s(\Omega)$为$G^s(\Omega)$内全体具紧支集的函数所组成的空间．$G_0^s(\Omega)$的拓扑对偶空间记为$D^{s\prime}(\Omega)$，即为Ω上的s-族超分布空间；$G^s(\Omega)$的拓扑对偶空间记为$E^{s\prime}(\Omega)$，即为Ω上具紧支集的s-族超分布空间．它们的拓扑结构如下：

设紧子集$K\subset\Omega$，对$m\in\mathbf{Z}_+$，定义函数空间$C^m(K)=\{f\in C^m(\text{int}\,K)\mid D^\alpha f(\forall|\alpha|\leqslant m)$可连续扩张到K上去$\}$．则我们在$C^m(K)$上可定义范数：

$$(1.2)\qquad \|f\|_{C^m(K)}=\sup_{\substack{|\alpha|<m\\x\in K}}|D^2 f(x)|,$$

使得$C^m(K)$成为Banacl空间．命$C^\infty(K)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m(K)$，我们用射影极限拓扑来定义函数空间$C^\infty(K)$上的拓扑结构．即：

$$(1.3)\qquad C^\infty(K)=\varprojlim_{m\to\infty}C^m(K)$$

1985年2月5日收到．由齐民友教授推荐．

故$C^{\infty}(K)$为Frechet空间.

设$C_0^{\infty}(K)=\{f\in C^{\infty}(\Omega)\mid \operatorname{supp}f\subset K\}$，则$C_0^{\infty}(K)$是$C^{\infty}(K)$的闭线性子空间，即$C_0^{\infty}(K)$亦为Frechet空间.

对固定的$A>0$，设

(1.4) $G^{s,A}(K)=\{f\in C^{\infty}(K)\mid \exists c,\ \|D^{\alpha}f\|_{C(K)}\leqslant cA^{|\alpha|}|\alpha|!^{s},\ \forall\alpha\}$,

(1.5) $G_0^{s,A}(K)=\{f\in C_0^{\infty}(K)\mid \exists c,\ \|D^{\alpha}f\|_{C(K)}\leqslant cA^{|\alpha|}|\alpha|!^{s},\ \forall\alpha\}$.

在函数空间$G^{s,A}(K)$上定义范数:

(1.6) $$\|f\|G^{s,A}(K)=\sup_{\substack{x\in K\\ \alpha}}\frac{|D^{\alpha}f(x)|}{A^{|\alpha|}|\alpha|!^{s}}$$

使得$G^{s,A}(K)$成为Banach空间，当然$G^{s,A}(K)$的闭线性子空间$G_0^{s,A}(K)$也为Banach空间.

如果$A_1\geqslant A_2$，则$G^{s,A_2}(K)\subseteq G^{s,A_1}(K)$及$G_0^{s,A_2}(K)\subseteq G_0^{s,A_1}(K)$，显然在拓扑(1.6)下嵌入映射$G^{s,A_2}(K)\to G^{s,A_1}(K)$及$G_0^{s,A_2}(K)\to G_0^{s,A_1}(K)$为连续的，故可分别用归纳极限来定义函数空间$G^{s}(K)$、$G_0^{s}(K)$:

(1.7) $$G^{s}(K)=\varinjlim_{A\to\infty}G^{s,A}(K);\quad G_0^{s}(K)=\varinjlim_{A\to\infty}G_0^{s,A}(K).$$

设K_1、K_2为Ω内两个紧子集，且$K_1\subset K_2$，则显然$G_0^{s}(K_1)\subseteq G_0^{s}(K_2)$，同时嵌入映射G $G^{s}(K_1)\to G_0^{s}(K_2)$是连续的，故可定义$G^{s}(\Omega)(G_0^{s}(\Omega))$上的拓扑结构为

(1.8) $$G^{s}(\Omega)=\varprojlim_{K\subset\Omega}G^{s}(K);\quad G_0^{s}(\Omega)=\varinjlim_{K\subset\Omega}G_0^{s}(K)$$

则$G^{s}(\Omega)$及$G_0^{s}(\Omega)$均为完备的局部凸拓扑空间，$G_0^{s}(\Omega)\subset G^{s}(\Omega)$，而且嵌入映射$G_0^{s}(\Omega)\to G^{s}(\Omega)$是连续的.

在超分布空间$D^{s'}(\Omega)$以及具紧支集的超分布空间$E^{s'}(\Omega)$上可以定义与其向量空间结构相容的种种拓扑，其中最重要的是弱拓扑和强拓扑两种. $D^{s'}(\Omega)(E^{s'}(\Omega))$上的弱拓扑即为在$G_0^{s}(\Omega)(G^{s}(\Omega))$上的逐点收敛拓扑；$D^{s'}(\Omega)(E^{s'}(\Omega))$上的强拓扑即为在$G_0^{s}(\Omega)(G^{s}(\Omega))$的有界集上的一致收敛拓扑. 显然弱拓扑及强拓扑均为局部凸拓扑，而且$D^{s'}(\Omega)(E^{s'}(\Omega))$内的强收敛蕴含着弱收敛.

在*Gevrey*函数空间中也可进行正则化. 设

(1.9) $$f(x)=\begin{cases}\exp\{-x^{-1/(s-1)}\}, & x>0,\\ 0 & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则很易验证$f(x)\in G^{s}(\mathbf{R})$. 命

(1.10) $$J(x)=c\prod_{i=1}^{n}\{f((2n)^{-1/2}+x_i)f((2n)^{-1/2}-x_i)\},\quad c>0,\ x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,$$

则$J(x)\in G_0^{s}(\mathbf{R}^n)$，且$J(x)\geq 0$，$\operatorname{supp}J(x)\subset\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|\leq 1\}$. 适当选择常数$c$，使得$\int_{\mathbf{R}^n}J(x)dx=1$，则定义Gevrey类软化子$J_{\varepsilon}(\varepsilon>0)$为:

(1.11) $$J_{\varepsilon}(x)=\varepsilon^{-n}J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

显然$J_{\varepsilon}(x)\in G_0^{s}(\mathbf{R}^n)$. $\operatorname{supp}J_{\varepsilon}(x)\subset\{x\in\mathbf{R}^n\ |x|\leqslant\varepsilon\}$及$\int_{\mathbf{R}^n}J_{\varepsilon}(x)dx=1$.

对一般可积函数φ，利用软化子J_ε可将其正则化：

(1.12) $$J_\varepsilon\varphi(x)=J_\varepsilon*\varphi(x)=\int_{\mathbf{R}^n}J_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

我们有以下结果：

定理1.1 1°．若φ为Ω上可积函数，其支集包含在Ω的某个紧子集K内，则当ε充分小时有$J\varphi(x)\in G_0^s(\Omega)$．

2°．若$\varphi\in G_0^s(\Omega)$，则在$G_0^s(\Omega)$的拓扑之下有$J_\varepsilon\varphi(x)\xrightarrow{\varepsilon\to0}\varphi(x)$．

证明 1°．由Lebesgue控制收敛定理，我们可在积分号下求微分，则

(1.13) $$|D^\alpha J_\varepsilon\varphi(x)|\leqslant\sup_x|D^\alpha J_\varepsilon(x)|\int|\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

当ε充分小时，$\operatorname{supp}J_\varepsilon\varphi\subset K_\varepsilon\subset\Omega$，（这里$K_\varepsilon$为K之$\varepsilon$-紧邻域），由$\varphi$的可积性及$J_\varepsilon(x)\in G_0^s(\mathbf{R}^n)$，从估计式(1.13)可推得$J_\varepsilon\varphi\in G_0^s(\Omega)$．

2°．这时存在着常数A、C，使得

$$\sup_{\substack{x\\ \alpha}}|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant CA^{|\alpha|}|\alpha|!^s.$$

由中值定理：$\sup\limits_{\substack{x\\ \alpha}}|D^\alpha\varphi(x-y)-D^\alpha\varphi(x)|\leqslant cn|y|A^{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!^s$，又因为$(|\alpha|+1)!^s=(|\alpha|+1)^s|\alpha|!^s$，故显然可找到常数$A_1>1$，$c_1$，使得$(|\alpha|+1)!^s\leqslant c_1A_1^{|\alpha|}|\alpha|!^s$．命$c'=cnc_1A$，则

$$\sup_{\substack{x\\ \alpha}}|D^\alpha\varphi(x-y)-D^\alpha\varphi(x)|\leqslant c'|y|(A_1)^{|\alpha|}|\alpha|!^s,\text{ 故}$$

$$\|J_\varepsilon\varphi-\varphi\|_{G_0^s(\Omega)}\leqslant\sup_{\substack{x\\ \alpha}}\frac{|D^\alpha J_\varepsilon\varphi(x)-D^\alpha\varphi(x)|}{(A_1A)^{|\alpha|}|\alpha|!^s}\leqslant c'\varepsilon\int_{|y|<\varepsilon}J_\varepsilon(y)\mathrm{d}y=c'\varepsilon,$$ 所以$\varepsilon\to0$时，$J_\varepsilon\varphi\to\varphi$．

在超分布里也可引进正则化：

(1.14) $$J_\varepsilon T(x)=T*J_\varepsilon(x),\quad T\in D^{s'}(\Omega)\ (E^{s'}(\Omega)).$$

（这里卷积定义为：$T*J_\varepsilon(x)=\langle T_y,J_\varepsilon(x-y)\rangle$.），则有

定理1.2 若$T\in D^{s'}(\Omega)$（$E^{s'}(\Omega)$），则$J_\varepsilon T$当$\varepsilon\to0$时以$D^{s'}(\Omega)$（$E^{s'}(\Omega)$）上的强拓扑收敛于T．

证明 对任意的$\varphi\in G_0^s(\Omega)$，因为

$$\langle J_\varepsilon T,\varphi\rangle=\langle T*J_\varepsilon,\varphi\rangle=\langle T,J_\varepsilon*\varphi\rangle=\langle T,J_\varepsilon\varphi\rangle,$$

由定理1.1，当$\varepsilon\to0$时，以$G_0^s(\Omega)$上的拓扑有$J_\varepsilon\varphi\to\varphi$，且此收敛显然当$\varphi$属于$G_0^s(\Omega)$的有界子界B时是一致的．故$\varphi\in$ B一致地有

$$\langle J_\varepsilon T,\varphi\rangle=\langle T,J_\varepsilon\varphi\rangle\xrightarrow{\varepsilon\to0}\langle T,\varphi\rangle.$$

§2 Paley-Wiener型定理

定理2.1 $\varphi\in G_0^s(\mathbf{R}^n)$之Fourier-Laplace变换是$\mathbf{C}^n$内的整函数$\hat{\varphi}(\rho)$ $(\rho=\xi+i\eta)$，且满足下列不等式

(2.1) 存在常数L、c、A, 使得 $|\hat{\varphi}(\rho)|\leqslant c\exp\{-(L|\rho|)^{1/s}+A|\eta|\}$, $\rho\in \boldsymbol{C}^n$.

反之，$\boldsymbol{C}^n$内每个满足性质(2.1)的整函数是$G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$内某个函数的Fourier-Laplace变换

证明 因为$\varphi\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)\subset C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，故$\hat{\varphi}(\rho)$为$\boldsymbol{C}^n$中的整函数．设$A$为正实数，使得$K=\operatorname{supp}\varphi\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant A\}$，则因

$$\rho^\alpha\hat{\varphi}(\rho)=\int_{\boldsymbol{R}^n}e^{-i\langle x,\rho\rangle}D^\alpha\varphi(x)\,dx,$$

而有

$$|\rho^\alpha\hat{\varphi}(\rho)|\leqslant\int_K e^{\operatorname{Im}\langle x,\rho\rangle}dx\cdot\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant|K|\exp\{A|\eta|\}\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|.\tag{2.2}$$

因为$\varphi\in G_0^s(K)$，故由$G_0^s(K)$上拓扑之定义，一定存在某个$B>0$，使得

$$\sup_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)|\leqslant\|\varphi\|_{G_0^{s,B}(K)}B^{|\alpha|}|\alpha|!^s,$$

即 $$|\hat{\varphi}(\rho)|\leqslant|K|\|\varphi\|\exp\{A|\eta|\}\inf_\alpha\{\frac{B^{|\alpha|}|\alpha|!^s}{|\rho^\alpha|}\}$$

设$|\alpha|=P$，因为$|\rho^\alpha|\neq0$ 时有$|\rho^\alpha|\geqslant(|\rho|/\sqrt{n})^P$，所以$\inf_\alpha\{\frac{B^{|\alpha|}|\alpha|!^s}{|\rho^\alpha|}\}\leqslant\inf_\alpha\{(\frac{B}{|\rho|/\sqrt{n}})^{|\alpha|}|\alpha|!^s\}\leqslant\inf_P\{(\frac{B}{|\rho|/\sqrt{n}})^PP^{Ps}\}$.

命$\mathscr{U}_s(y)=\inf_P\{P^{Ps}/|y|^P\}$，则$\mathscr{U}_s(\frac{|\rho|/\sqrt{n}}{B})=\inf_P\{(\frac{B}{|\rho|/\sqrt{n}})^PP^{Ps}\}$，即：

$$\inf_\alpha\{\frac{B^{|\alpha|}|\alpha|!^s}{|\rho^\alpha|}\}\leqslant\mathscr{U}_s(\frac{|\rho|/\sqrt{n}}{B}).\tag{2.3}$$

设$f(x)=\frac{x^{xs}}{|y|^x}$ ($x>0$ 为正实数)，则$[\ln f(x)]'_x=\frac{f'(x)}{f(x)}=s\ln x+s-\ln|y|$. 因为$[\ln f(x)]''=\frac{s}{x}>0$，故$\ln f(x)$有最小值，其最小点$x_0$适合：$s\ln x_0+s-\ln|y|=0$，即$x_0=\frac{1}{e}|y|^{1/s}$.所以$\inf_{x>0}\ln f(x)=\ln f(x_0)=-\frac{s}{e}|y|^{1/s}$，故$\inf_{x>0}f(x)=\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$. 当$P=|\alpha|$为正整数时，$\mathscr{U}_s(y)=\inf_P f(P)\geqslant\inf_{x>0}f(x)=\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$，取$P_1>x_0$为正整数，且$P_1-x_0\leqslant1$，将$\ln f(P_1)$在$x_0$点展开：

$$\begin{aligned}\ln f(P_1)&=\ln f(x_0)+(P_1-x_0)[\ln f(x_0)]'+\frac{1}{2}(P_1-x_0)^2[\ln f(x_0+\theta(P_1-x_0))]''\\&(0<\theta<1)=\ln f(x_0)+\frac{s}{2x_2}(P_1-x_0)^2\quad(x_2=x_0+\theta(P_1-x_0))\\&<\ln f(x_0)+\frac{s}{2x_0}=-\frac{s}{e}|y|^{1/s}+\frac{se}{2}|y|^{-1/s}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

所以$\mathscr{U}_s(y)\leqslant\exp\{\frac{se}{2}|y|^{-1/s}\}\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$.

当$|y|\geqslant1$时，$\mathscr{U}_s(y)<\exp\{\frac{se}{2}\}\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$；当$0<|y|<1$时，$\mathscr{U}_s(y)\leqslant1\leqslant\exp(\frac{s}{e})\cdot\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}<\exp(\frac{se}{2})\exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$. 故取$c_1=\exp(\frac{se}{2})$，当$0<|y|<\infty$ 时都有

$\mathscr{U}_s(y) \leqslant c_1 \exp\{-\frac{s}{e}|y|^{1/s}\}$，故

(2.5) $$\mathscr{U}_s\left(\frac{|\rho|/\sqrt{n}}{B}\right) \leqslant c_1 \exp\{-\frac{s}{e}\left(\frac{|\rho|/\sqrt{n}}{B}\right)^{1/s}\}.$$

取$c=|K|\cdot\|\varphi\|\cdot c_1$，$L=(\frac{s}{e})^s(\frac{1}{B\sqrt{n}})$，则

$$|\hat{\varphi}(\rho)| \leqslant c_1 \exp\{-(L|\rho|)^{1/s}+A|\eta|\}.$$

不等式(2.1)成立.

反之，因为$\varphi(\xi)$满足不等式(2.1)．故其Fourier逆变换$(F^{-1}\hat{\varphi})(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{\varphi}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$有定义,并且可在积分号下求导$D^\alpha(F^{-1}\hat{\varphi})(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{\varphi}(\xi)\xi^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$．定义$\varphi(x)=(F^{-1}\hat{\varphi})(x)$，则$\varphi\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，同时

(2.6) $$\sup_x|D^\alpha\varphi(x)| \leqslant (2\pi)^{-n}\|\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n)}.$$

由$\hat{\varphi}(\xi)$满足不等式(2.1)，取$0<M<L$，则

(2.7) $$\|\xi^\alpha\varphi(\xi)\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant \sup_\xi\{|\xi^\alpha|/\exp\{M|\xi|\}^{1/s}\}\sup_\xi|\exp\{(L|\xi|)^{1/s}\}\cdot$$
$$\cdot|\hat{\varphi}(\xi)|\cdot\|\exp\{(M|\xi|)^{1/s}-(L|\xi|)^{1/s}\}\|_{L^1(\boldsymbol{R}^n)} \leqslant c\cdot c'\cdot\sup_\xi\{|\xi|^{|\alpha|}/\exp\{(M|\xi|)^{1/s}\}\}.$$

设$|\alpha|=P$，$|\xi|=t$，$f(t)=t^P\exp\{-(Mt)^{1/s}\}$，则

$$\sup_{t>0}f(t)=\sup_\xi\{|\xi|^{|\alpha|}\exp\{-(M|\xi|)^{1/s}\}\}.$$

因为$f'(t)=Pt^{P-1}\exp\{-(Mt)^{1/s}\}-t^P[\exp\{-(Mt)^{1/s}\}\frac{M^{1/s}}{s}t^{\frac{1-s}{s}}]$，则命$f'(t)=0$得$t_0=(sP)^s/M$．又$f''(t_0)<0$，故

$$\sup_{t>0}f(t)=f(t_0)=\frac{(sP)^{sP}}{M^P}\exp\{-sP\}=(\frac{sP}{e})^{sP}\cdot\frac{1}{M^P}.$$

由stirling公式：$e^{-sP}P^{sP}\leqslant P!^s$，则证明了

(2.8) $$\sup_{t>0}f(t) \leqslant (\frac{s^s}{M})^P P!^s,$$

即$\varphi(x)\in G^s(\boldsymbol{R}^n)$．下面证明$\varphi(x)$具紧支集:

因为$\hat{\varphi}(\rho)$为整函数且满足不等式(2.1)，由Cauchy定理，对任意固定的$\eta\in\boldsymbol{R}^n$，有

$$\varphi(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\hat{\varphi}(\xi+i\eta)e^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}d\rho\ (\rho=\xi+i\eta),\ 故$$

$$|\varphi(x)| \leqslant c_2\exp\{A|\eta|-\langle x,\eta\rangle\}.$$

命$\eta=tx$，则$\exp\{A|\eta|-\langle x,\eta\rangle\}=\exp\{-t(|x|^2-A|x|)\}$，故$x\bar{\in}\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant A\}$，则存在$\delta>0$，使得

(2.9) $$|\varphi(x)| \leqslant c_2\exp\{-\delta t\}\to 0 \qquad (t\to+\infty).$$

这表明$\text{supp}\varphi\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant A\}$，即$\varphi(x)\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$．

我们知道，超分布$T\in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$之Fourier变换定义为

(2.10) $$FT(\xi)=\hat{T}(\xi)=\langle\hat{T}_x,e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle\cdot \qquad \xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

设$\rho=\xi+i\eta\in\boldsymbol{C}^n$，则$\hat{T}(\xi)$在$\boldsymbol{C}^n$上的扩张$\hat{T}(\rho)$即为$T$之Fourier-Laplace变换：

(2.11) $$\hat{T}(\rho)=\langle T_x, e^{-i\langle x,\rho\rangle}\rangle,\quad \rho=\xi+i\eta\in \boldsymbol{C}^n.$$

这时对任意的$\varphi\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$，有

$$\langle\hat{T}(\xi),\ \varphi\rangle=\langle\langle T_x, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\rangle,\ \varphi\rangle=\langle T_x,\ \langle e^{-i\langle x,\xi\rangle},\varphi\rangle\rangle=\langle T,\ \hat{\varphi}\rangle.$$

故可利用对称性来定义T之Fourier逆变换：

(2.12) $$\langle F^{-1}T,\ \varphi\rangle=\langle T,\ F^{-1}\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n).$$

当然，我们还没有证明定义式(2.10)是否有意义，这等价于证明作为x的函数，$e^{-i\langle x,\xi\rangle}\in G^s(\boldsymbol{R}^n)$．其次我们还需证明$T\in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$之Fourier-Laplace 变换$\hat{T}(\rho)$为$\boldsymbol{C}^n$上的整函数．

引理2.1 1°． 若$x\in\boldsymbol{R}^n$，$\rho=\xi+i\eta\in\boldsymbol{C}^n$，则函数

$$\boldsymbol{C}^n\in\rho\to e^{-i\langle x,\rho\rangle}\in G^s(\boldsymbol{R}^n).$$

为$G^s(\boldsymbol{R}^n)$值的整函数．

2°． $T\in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$之Fourier-Laplace 变换$T(\rho)$为$\boldsymbol{C}^n$上的整函数．

证明 1°． 由Taylor展式

(2.13) $$e^{-i[x,\rho]}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i\langle x,\rho\rangle)^j}{j!}.$$

取$d>0$，而$\sup\limits_{\substack{|x|\leq d\\ a}}\dfrac{|D_x^a(-i\langle x,\rho\rangle)^j/j!|}{A^{|a|}|a|!}\leqslant\sup\limits_{\substack{|x|\leq d\\ a}}\dfrac{|x|^{j-|a|}|\rho|^j}{A^{|a|}|a|!\,(j-|a|)!}\leqslant\sup\limits_{a}\dfrac{1}{(Ad)^{|a|}}\cdot$

$\cdot\dfrac{(2d|\rho|)^j}{j!}$，则作为$x$的函数，$\dfrac{(-i\langle x,\rho\rangle)^j}{j!}\in G^{1,A}\{|x|\leqslant d\}$，并且当$\rho$属于$\boldsymbol{G}^n$之某一紧子集时以上Taylor 展式(2.13) 以$G^{1,A}\{|x|\leqslant d\}$ 拓扑对ρ绝对且一致地收敛．由d及A的任意性，当ρ属于$\boldsymbol{C}^n$之某一紧子集时，展式(2.13) 以$G^1(\boldsymbol{R}^n)$拓扑对ρ绝对且一致地收敛．又因为$G^1(\boldsymbol{R}^n)\subset G^s(\boldsymbol{R}^n)$，故由空间$G^s(\boldsymbol{R}^n)$的完备性，作为$x$的函数，$e^{-i\langle x,\rho\rangle}\in G^s(\boldsymbol{R}^n)$同时又为$\rho\in\boldsymbol{C}^n$的整函数．

2°． 因为T为具紧支集的超分布，而$e^{-i\langle x,\rho\rangle}$为$G^s(\boldsymbol{R}^n)$值的整函数，故(2.11)式定义的复值函数

$$\boldsymbol{C}^n\in\rho\longrightarrow\hat{T}(\rho)=\langle T_x,\ e^{-i\langle x,\rho\rangle}\rangle\in\boldsymbol{C}$$

为整函数．

定理2.2 超分布$T\in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$之Fourier-Laplace变换是$\boldsymbol{C}^n$内的整函数$\hat{T}(\rho)$ ($\rho=\xi+i\eta\in\boldsymbol{C}^n$)，且满足下列不等式：

(2.14) 对任意的$L>0$，存在常数c、A，使得

$$|\hat{T}(\rho)|\leqslant c\exp\{(L|\rho|)^{1/s}+A|\eta|\},\qquad \rho\in\boldsymbol{C}^n.$$

反之，$\boldsymbol{C}^n$内每个满足性质(2.14)的整函数是$E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$内某个超分布的Fourier-Laplace变换．

证明 由引理2.1，超分布$T\in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$之Fourier-Laplace变换为$\boldsymbol{C}^n$内的整函数，同时对任意的$\varphi\in G^s(\boldsymbol{R}^n)$，存在着紧子集$K_1\subset\mathrm{supp}T$，且对任意的$B>0$，存在常数$c$，使得

(2.15) $$|[T,\varphi]|\leqslant c\|\varphi\|_{G^{s,B}(K_1)}=c\sup_{\substack{x\in K_1\\ a}}\frac{|D^a\varphi(x)|}{B^{|a|}|a|!^s}.$$

这时一定存在$A>0$，使得$K_1\subset\mathrm{supp}T\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n\,|\,|x|\leqslant A\}$．

取$\varphi_\rho(x)=e^{-i\langle x,\rho\rangle}\in G^s(\boldsymbol{R}^n)$，则$|D_x^\alpha\varphi_\rho(x)|\leqslant|\rho^\alpha|e^{\langle x,\eta\rangle}$，所以

$$(2.16)\qquad |\hat{T}(\rho)|=|[T,\varphi_\rho]|\leqslant c\sup_{\substack{x\in K_1\\ \alpha}}\frac{|D_x^\alpha\varphi_\rho(x)|}{B^{|\alpha|}|\alpha|!^s}\leqslant c\sup_\alpha\frac{|\rho^\alpha|}{B^{|\alpha|}|\alpha|!^s}e^{A|\eta|}$$

$$\leqslant c\sup_\alpha\left(\frac{|\rho|}{B}\right)^{|\alpha|}\frac{1}{|\alpha|!^s}e^{A|\eta|}\leqslant c\left[\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{(|\rho|/B)^{|\alpha|/s}}{|\alpha|!}\right]^s\cdot e^{A|\eta|}$$

$$=c\exp\{s(\frac{1}{B}|\rho|)^{1/s}+A|\eta|\}=c\exp\{(\frac{s^s}{B}|\rho|)^{1/s}+A|\eta|\}.$$

命$L=\dfrac{s^s}{B}$ 由$B>0$的任意性可得$L>0$也是任意的，即不等式(2.14)成立．

反之，若$\boldsymbol{C}^n$内整函数$\hat{T}(\rho)$满足不等式(2.14)，通过下列来定义T：

$$(2.17)\qquad \langle T,\psi\rangle=\langle\hat{T}(\xi),F^{-1}\psi\rangle,\quad\forall\psi\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n).$$

现证式(2.17)右方有意义：事实上，因为

$$\langle\hat{T}(\xi),F^{-1}\psi\rangle=\langle\hat{T}(-\xi_1),(\frac{-1}{2\pi})^n\hat{\psi}(\xi_1)\rangle,$$

而又因$\psi\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$，故由定理2.1，存在常数$L_1$、$c_1$，使得：

$$|\hat{\psi}(\xi_1)|\leqslant c_1\exp\{-(L_1|\xi_1|)^{1/s}\},\quad \xi_1\in\boldsymbol{R}^n.$$

所以

$$(2.18)\qquad |\hat{T}(-\xi_1)\hat{\psi}(\xi_1)|\leqslant c\cdot c_1\exp\{(L|\xi_1|)^{1/s}-(L_1|\xi_1|)^{1/s}\},\quad \xi_1\in\boldsymbol{R}^n.$$

由L的任意性，取$L<L_1$，则定义式(2.17)右端在$\boldsymbol{R}^n$上可积分，故(2.17)式定义了$G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$上的一个线性泛函T.

设ψ_j在$G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$)内收敛于0，我们知道这等价于存在常数$L_2>0$，使得$\exp\{(L_2|\xi|)^{1/s}\}\hat{\psi}_j(\xi)$在$\boldsymbol{R}^n$内一致地收敛于0．设存在$\delta>0$，使得$L^{1/s}<L_2^{1/s}-\delta^{1/s}$，则

$$(2.19)\qquad |\hat{T}(-\xi)\hat{\psi}_j(\xi)|\leqslant c|\exp(L_2|\xi|)^{1/s}\hat{\psi}_j(\xi)|\exp\{-(\delta|\xi|)^{1/s}\}.$$

故定义式(2.17)中$[T,\psi_j>\to 0\ (j\to\infty)$，即$T\in D^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$．显然整函数$\hat{T}(\rho)$即为(2.17)式所定义的超分布$T$之Fourier-Laplace变换．

下面证明T具紧支集：

设$\{J\varepsilon_i\}$为$G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$内软化子序列，取$\varepsilon_i=\dfrac{1}{i}$，则$\mathrm{supp}J_{1/i}(x)\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant\dfrac{1}{i}\}$．因为$\widehat{J_{1/i}T}(\rho)=\hat{J}_{1/i}(\rho)\cdot\hat{T}(\rho)$，而$\hat{J}_{1/i}(\rho)$满足不等式(2.1)．$\hat{T}(\rho)$满足不等式(2.14)，故

$$(2.20)\qquad |\widehat{J_{1/i}T}(\rho)|=|\hat{J}_{1/i}(\rho)\cdot\hat{T}(\rho)|\leqslant c\cdot c_i\exp\{(L|\rho|)^{1/s}-(L_i|\rho|)^{1/s}\}\exp\{(A+\frac{1}{i})|\eta|\}.$$

由L的任意性，存在$\delta>0$，使得$L^{1/s}-L_i^{1/s}\leqslant-\delta^{1/s}$，则

$$(2.21)\qquad |\widehat{J_{1/i}T}(\rho)|\leqslant c\cdot c_i\exp\{-(\delta|\rho|)^{1/s}+(A+\frac{1}{i})|\eta|\},$$

即$\boldsymbol{C}^n$内整函数$\widehat{J_{1/i}T}(\rho)$满足不等式(2.1)．由定理2.1，$J_{1/i}T\in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$，同时$\mathrm{supp}J_{1/i}T\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant A+\dfrac{1}{i}\}$．又由定理1.2，当$i\to\infty$时，$J_{1/i}T$以$D^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$上强拓扑收敛于$T$，故$\mathrm{supp}T\subset\{x\in\boldsymbol{R}^n||x|\leqslant A\}$．

定理2.1和定理2.2分别称之为Gevrey函数类及超分布中的Paley-Wiener型定理．

§3 一个应用

下面应用Paley-Wiener型定理来讨论Gevrey函数空间与S型函数空间之间的关系．

Гельфанд-Шилов[2] 为了讨论偏微分方程的Cauchy问题，而引进了S型函数空间及其Fourier变换的理论．Gevrey函数空间与S型函数空间有着密切的联系，[1]中指出了

$S_\alpha(\alpha\geqslant 0)$ 及$S^\beta(\beta\geqslant 0)$空间的定义及一些性质(也见Гельфанд-Шилов [2]),并得到

(3.1) $$S^\beta\subset G^s(\boldsymbol{R}^n),\quad (\beta>s>1).$$

所以S^β的拓扑对偶空间包含了具紧支集的超分布空间$E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$.

Гельфанд-Шилов[2]中还引进了另一类函数空间: $S_\alpha^\beta(\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0)$空间. 这儿仅列出我们所需要的关于$S_\alpha^\beta$空间的几个结果,其详细证明可见[2].

定义3.1 $S_\alpha^\beta(\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$空间由一切适合下列不等式的$C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$函数$\varphi(x)$组成:

(3.2) $$|x^K D_x^q\varphi(x)|\leqslant cH^{|K|}B^{|q|}K^{\alpha K}q^{\beta q}(\forall\ K、q\in \boldsymbol{Z}_+^n,\text{常数}c、H、B\text{依赖于函数}\varphi).$$

由定义显然$S_\alpha^\beta\subset S_\alpha\cap S^\beta$. 若$\alpha=0$,因为$S_0=C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$,故$S_0^\beta$为由$S^\beta$内具紧支集的函数组成. 若$\beta<1$,则$\varphi\in S_\alpha^\beta$可拓展为$z=x+iy\in\boldsymbol{C}^n$内的一个整函数$\varphi(z)$,且满足不等式:

(3.3) $$|\varphi(x+iy)|\leqslant c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}+b|y|^{1/1-\beta}\},$$

这里$a=\dfrac{\alpha}{eH^{1/\alpha}}$,$b>\dfrac{1-\beta}{e}(Be)^{1/1-\beta}$. 我们有下面的结果:

引理3.1 $\varphi\in S_\alpha^\beta(\alpha\geqslant 0,0\leqslant\beta<1)$空间,当且仅当$\varphi$可拓展为$z=x+iy\in\boldsymbol{C}^n$内的一个整函数$\varphi(z)$,且满足不等式(3.3).

证明 见[2].第四章、§7.

类似于在S_α、S^β空间上定义的拓扑一样(见[1]),S_α^β空间上的拓扑也可由一列Fréchet空间$\{S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}\}$的归纳极限来定义.

定义3.2 空间$S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}(\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0;B_0>0$及$H_0>0$固定)由一切适合下列不等式的$S_\alpha^\beta$函数$\varphi(x)$组成:

(3.4) $$|x^K D_x^q\varphi(x)|\leqslant cH_0^{|K|}B_0^{|q|}K^{\alpha K}q^{\beta q}.$$

在空间$S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}$上可引进可数多个半范:

(3.5) $$\|\varphi\|_{(K,\alpha,H_0)}^{(q,\beta,B_0)}=\sup_x|H_0^{-|K|}B_0^{-|q|}K^{-\alpha K}q^{-\beta q}x^K D_x^q\varphi(x)|,$$

则$S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}$为Frechet空间. 当$\beta<1$时,在$S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}$上还可引进与(3.5)等价的另一族半范:

(3.6) $$\|\varphi\|_{(a,\alpha)}^{(b,\beta)}=\sup_z|\exp\{a|x|^{1/\alpha}-b|y|^{1/1-\beta}\}\varphi(x+iy)|,(z=x+iy).$$

当$B_0\leqslant B_1$,$H_0\leqslant H_1$,有$S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}\subseteq S_{\alpha,H_1}^{\beta,B_1}$,并且恒等嵌入是连续的,故可按$B_0$、$H_0$之上升为序来定义$\{S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}\}$的归纳极限:

(3.7) $$S_\alpha^\beta=\varinjlim_{B_0,H_0}S_{\alpha,H_0}^{\beta,B_0}.$$

当$\alpha_1\leqslant\alpha_2$,$\beta_1\leqslant\beta_2$,显然有$S_{\alpha_1}^{\beta_1}\subseteq S_{\alpha_2}^{\beta_2}$,并且在拓扑(3.7)下恒等嵌入是连续的,故得:

(3.8) $$S_\alpha=S_\alpha^\infty=\varinjlim_{\beta\to\infty}S_\alpha^\beta;\quad S^\beta=S_\infty^\beta=\varinjlim_{\alpha\to\infty}S_\alpha^\beta,$$

即空间S_α、S^β可视为空间S_α^β的归纳极限.

引理3.2 $F(S_\alpha^\beta)=S_\beta^\alpha\ (\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$.

证明 见[2]、第四章,§6.2.

类似[1]中系1.7,这里也可推出F: $S_\alpha^\beta\to S_\beta^\alpha$是连续的.

引理3.3 S_α^β为非平凡空间当且仅当

1° 若$\alpha>0$，$\beta>0$，则$\alpha+\beta\geqslant 1$，

2° 若$\alpha=0$，则$\beta>1$；

3° 若$\beta=0$，则$\alpha>1$.

证明：见［2］、第四章，§8.1 及§8.2.

本节的主要结果如下：

定理3.1 $S_0^\beta=G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$.

证明 当$\beta=1$时，我们知道$G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)=\{0\}$；而由引理3.3，$\alpha=0$，$\beta\leqslant 1$ 时$S_0^\beta=\{0\}$，故$\beta\leqslant 1$时有$S_0^\beta=G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$. 又当$\beta=\infty$时，由式(3.8)，$S_0^\infty=S_0=C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)=G_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 所以下面仅考虑$1<\beta<\infty$.

由式(3.1)，$S_0^\beta\subset S_0\cap S^\beta=C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)\cap S^\beta\subset C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)\cap G^s(\boldsymbol{R}^n)$（这里$1<s<\beta$），而$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)\cap G^s(\boldsymbol{R}^n)=G_0^s(\boldsymbol{R}^n)\subset G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$，即$S_0^\beta\subset G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$.

反之，对任意的$\varphi\in G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$，由Paley-Wiener型定理2.1，$\varphi$之Fourier-Laplace 变换为$\boldsymbol{C}^n$内的整函数$\hat{\varphi}(\rho)$且满足：

$$|\hat{\varphi}(\rho)|\leqslant c\exp\{-(L|\rho|)^{1/\beta}+A|\eta|\},\quad \rho=\xi+i\eta\in\boldsymbol{C}^n.$$

而$|\rho|\geqslant|\xi|$，则$-(L|\rho|)^{1/\beta}\leqslant-(L|\xi|)^{1/\beta}$，所以

$$\exp\{-(L|\rho|)^{1/\beta}+A|\eta|\}\leqslant\exp\{-(L|\xi|)^{1/\beta}+A|\eta|\}=\exp\{-L^{1/\beta}|\xi|^{1/\beta}+A|\eta|\},$$

即$\hat{\varphi}(\xi+i\eta)$满足形如(3.3)的不等式. 由引理3.1，$\hat{\varphi}(\xi)\in S_\beta^0$；又由引理3.2，$\varphi(x)\in S_0^\beta$，故$G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)\subset S_0^\beta$.

显然在函数空间S_0^β上赋拓扑(3.7)或者赋拓扑(1.8)是完全等价的. 故定理3.1告诉我们，函数空间S_0^β之拓扑对偶空间亦为超分布空间$D^{\beta'}(\boldsymbol{R}^n)$. 由此出发，便可沟通Gevrey函数空间理论与$S^\beta$型函数空间理论之间的联系，但限于本文的篇幅，对此我们暂且不再去赘述了.

参 考 文 献

［1］ 齐民友，拟微分算子的一个推广，武汉大学学报自然科学版——数学专刊(Ⅰ)(1981)，1—16.

［2］ И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов，Обобщенные функции，вып. 2 Гос.изд.физ-матем.пит. (1958)，Москва.

［3］ 小松彦三郎，超函数论入门，岩波数学基础讲座，岩波书店(1978)，（日文）.

［4］ ——，Ultradistributions Ⅰ，Structure theoreme and a characterization，J. Fac. Sci. Univ. Tokyo，Sect.，IA，20(1973)) 25—105.

［5］ ——，Ultradistributions Ⅱ，The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold，J. Fac. Sci. Univ. Takyo，sect. IA. 24(1977).

［6］ C. Roumieu，Ultra-distributions définies sur $\boldsymbol{R}^n$ et sur Certaines classes de variétes defférential bles，J. Analyse Math.，10(1962—63)，153—192.

Paley-Wienerian Type Theorems and Their Application in Gevrey Classes and Ultradistributions

Chen Hua

Abstract

In this Paper, the Paley-Wienerian type theorems in Gevrey classes and ultradistributions are discussed.

Theorem 2.1 $\varphi \in G_0^s(\boldsymbol{R}^n)$ if and only if the Fourier-Laplace transformation of φ is a holomorphic function $\hat{\varphi}(\rho)$ in $\boldsymbol{C}^n$ and satisfies:

(2.1) $\exists$ constants L, c, A, such that

$$|\hat{\varphi}(\rho)| \leqslant c\exp\{-(L|\rho|)^{1/s} + A|\eta|\}, \quad \rho = \xi + i\eta \in \boldsymbol{C}^n.$$

Theorem 2.2 Ultradistribution $T \in E^{s'}(\boldsymbol{R}^n)$ if and only if the Fourier-Laplace transformation of T is a holomorphic function $\hat{T}(\rho)$ in $\boldsymbol{C}^n$ and satisfies.

(2.14) For any $L>0$, $\exists$ Constants c, A, such that

$$|\hat{T}(\rho)| \leqslant c\exp\{(L|\rho|)^{1/s} + A|\eta|\}, \quad \rho = \xi + i\eta \in \boldsymbol{C}^n.$$

As an application, we have deduced the S^β spaces with compact support can be identified to the Gevrey classes with compact support as follows:

Theorem 3.1 $S_0^\beta = G_0^\beta(\boldsymbol{R}^n)$.