数学研究与评论
第八卷　第二期

整函数的复合函数的增长性

周　正　中

（安徽师范大学，芜湖）

文中使用的符号如，$T(r,f)$、ρ_f、λ_f、$\delta(a,f)$ 等分别表示R、Nevanlinna的特徵函数、级、下级与亏量。

首先将A、P、Singh在〔1〕中的一些结果严格化，叙述如下：

定理A　设 f 与 g 是有穷级整函数，且具有 $\rho_g>\rho_f\geqslant\lambda_f>0$，则

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f(g))}{T(r,f)}=\infty.$$

推论　设 f 与 g 是有穷级超越整函数，且具有 $\rho_g>\rho_f\geqslant\lambda_f>0$，则 $f(g)$ 是无穷级整函数.

定理B　设 f 与 g 是有穷级超越函数，且具有 $\rho_g>0$ 与 $\lambda_f>0$，则

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log T(r,f(g))}{\log T(r,g)}=\infty.$$

进一步可得到如下结果：

定理1　设 f 与 g 是有穷级整函数，且具有 $\lambda_g>\rho_f>0$，则

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log T(r,f(g))}{T(r,f)}=\infty.$$

定理2　设 f 与 g 是有穷级整函数，且具有 $\lambda_g>\rho_f\geqslant\lambda_f>0$，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f(g))}{T(r,f)}=\infty.$$

定理3　设 f 与 g 是超越整函数，且具有 $\lambda_g>0$ 与 $\rho_g<+\infty$，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f(g))}{\log T(r,g)}=\infty.$$

若 f 与 g 是超越整函数，Singh在〔1〕中提出 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log T(r,f(g))}{T(r,g)}$ 是否存在的问题？本文指出，如果对 f 与 g 不再增加其它假设条件，$\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\log T(r,f(g))}{T(r,g)}$ 的存在问题不能确定，事实上，我们有

若 f 与 g 是有穷级超越整函数，且 $g(0)=0$ 与 $\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(a,g)=1$，则

* 1987年7月13日收到.

（转273页）

参 考 文 献

1. Stroud, A. H., Integration formulas and orthogonal polynomial for two variables, SIAM J. Numer. Anal., 6 (1969), 222-229.
2. Franke, R., Obtaining cubature for rectangles and other planar regions by using orthogonal polynomials, Math. Comp., 25(1971), 803-817.
3. Ogawa, S., Arioka, S, and Kida, S., On orthogonal polynomial in two variables and Gaussian cubature formulas, Math, Japan., 25(1980), 255-277.
4. Мысовских, И. П., Интерпо леционные Кубатурные формулы, Hayka, 1981.
5. Marden, M., Geometry of Polynomials, 2 nd. ed. Math. Surveys. no. 3. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1966).

（接274页）

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log T(r,f(g))}{T(r,g)}\leqslant\pi\rho_f.$$

若f与g分别是无穷级与有穷级整函数，且$\lim\limits_{r\to\infty}\inf\dfrac{T(r,g)}{r^{\rho_g}}>0$，$\lim\limits_{r\to\infty}\mathrm{Sup}\dfrac{T(r,g)}{r^{\rho_g}}>+\infty$

则
$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log T(r,f(g))}{T(r,g)}=\infty.$$

为了证明上述的定理，应用如下引理：

引理1[2] 设f与g是整函数，且$g(0)=0$，则对所有的$r>0$，有

$$T(r,f(g))\leqslant T(M(r,g),f)$$

引理2[3] 设f与g是整函数，且$g(0)=0$，则

$$M(r,f(g))\geqslant M((1+0(1))M(r,g),f).$$

引理3[4] 设f与g是超越整函数，且$\lambda_f>0$，则 $\lambda_{f(g)}=\infty$.

参 考 文 献

[1] A. P. Singh, Kodai Math. J. 8(1985), 99—102.
[2] Niino. K and N. Suit, Kodai Math. J. 3(1980), 374—379.
[3] J. Clunie, Quart J. Math. Oxfords Ser. 26(1955) 176—178, J. Clunie, The composition of entire and meromophic functions. Math. Essays dedicated to A. J. Macintyre(Ohio Univ. press) (1970) 75—92.
[4] G. D. Song and C. C. Yang, Indian J. pure appl. Math. 15(1984), 67—82.