可数马尔科夫过程的强马氏性*

薄　连　明

（南开大学，天津）

§1　引　　理

对非齐次马尔科夫过程转移概率的分析性质及非齐次可数马尔科夫过程样本函数的性质，人们已做了较为系统的研究[1,4,2]. 本文讨论的是非齐次可数马尔科夫过程（以下简称为马氏链）的强马氏性问题，这是马氏链基本理论的一个重要组成部分．若一个右标准马氏链可分、Borel 可测且右下半连续，则称其为右正则马氏链（详见定义2.1）．本文首先指出：任何一个右标准马氏链都有右正则修正；继而，通过考察推移过程的性质，证明了：任何右正则马氏链均具有强马氏性．从而在右标准马氏链情形，本文将〔6〕第二章§4 §6中过程右连续条件减弱为右下半连续；同时，对于齐次马氏链，本文的结果蕴含着〔5〕§3及〔8〕§Ⅱ8．§Ⅱ9中的全部相应结论

§2　定　义　与　基　本　命　题

设I为自然数集之子集，仿〔1〕§2定义转移函数族（以下简称为转函）；右标准转函．

又设 $X=\{x_t: t\geq 0\}$ 为完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程，以I为其状态空间；$(p_{ij}(s,t): i, j\in I, 0\leq s<t)$ 为一转函，简记为 (p_{ij}).

定义2.1　若对任意自然数 n，$0\leq s_0<s_1<\cdots<s_n$，$\{i_0, i_1, \cdots, i_n\}\subset I$ 有

$$P(x_{s_\nu}=i_\nu, 0\leq\nu\leq n)=P(x_{s_0}=i_0)\prod_{\nu=1}^{n-1}P_{i_\nu i_{\nu+1}}(s_\nu, s_{\nu+1}) \tag{2.1}$$

则称X是以 (p_{ij}) 为转函的马氏链，简称为X是马氏链．进而，当 (p_{ij}) 为右标准转函时，称X为右标准马氏链．

命题2.1　若X为右标准马氏链，则

（i）X是右随机连续过程；

（ii）p_{ij} 为二元右连续函数，即对任意 $0\leq s<t$ 有：

$$\lim_{\substack{h_1\downarrow 0\\ h_2\downarrow 0}} p_{ij}(s+h_1, t+h_2)=p_{ij}(s,t), \tag{2.2}$$

特别有：
$$\lim_{h\downarrow 0} p_{ij}(s+h, t)=p_{ij}(s,t).$$

* 1985年5月16日收到．

证 仿〔2〕引理1之证可证得（i）.

注意到当 $s+h_1<t+h_2$ 时有

$$|p_{ij}(s+h_1,t+h_2)-p_{ij}(s,t)|\leq|p_{ij}(s+h_1,t+h_2)-p_{ij}(s,t+h_2)|+|p_{ij}(s,t+h_2)-$$

$$-p_{ij}(s,t)|\leq 2[1-p_{ii}(s,s+h_1)]+[1-p_{jj}(t,t+h_2)]+\sum_{R\neq j}p_{ik}(s,t)p_{kj}(t,t+h_2),$$

利用 (p_{ij}) 的右标准性及控制收敛定理，知（2.2）式成立. ■

定义2.2 设 $\{\mathscr{F}_t,t\geq 0\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的一族子 σ 域，若其满足：

（i）$\mathscr{F}_0$ 含有一切零概集； （ii）$\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}$ $(t_1<t_2)$； （iii）右连续，即 $\mathscr{F}_{t+0}=\mathscr{F}_t$ $(t\geq 0)$，其中 $\mathscr{F}_{t+0}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s$ 则称 $\{\mathscr{F}_t:t\geq 0\}$ 为一参考系.

定义2.3 设X为马氏链，$\{\mathscr{F}_t:t\geq 0\}$ 为一参考系，若有：

（i）X为 $\{\mathscr{F}_t:t\geq 0\}$ 适应过程；

（ii）对任意 $j\in$ I，$0\leq s<t$ 有

$$P(x_t=j\mid\mathscr{F}_s)=p_{x_sj}(s,t)\quad a.e.\ [P],\tag{2.3}$$

则称 $\{\mathscr{F}_t:t\geq 0$ 为X的一个可取参考系.

由（2.3）式易得：对任意 $A\in\mathscr{F}_s$，$i\in$ I 有

$$P(A,x_s=i;x_t=j)=P(A,x_s=i)\cdot p_{ij}(s,t).\tag{2.4}$$

对任意 $0\leq s\leq t$，令

$$\mathscr{F}_t^s=\sigma(x_u:s\leq u\leq t)$$

且以 $\overline{\mathscr{F}_t^s}$ 表示 $\mathscr{F}_t^s$ 对概率 P 的完备化 σ 域*).

命题2.2 若X为右标准马氏链，则 $\{\overline{\mathscr{F}_t^0}:t\geq 0\}$ 为X的最小可取参考系.

证 对任意 $j\in$ I，$t>0$，利用 $\lambda-\pi$ 类方法[3]，由（2.1）可得：$P(x_t=j\mid\mathscr{F}_s^0)=p_{x_sj}(s,t)$ $a.e.$ $[P]$ $(0\leq s<t)$. 故由 $\overline{\mathscr{F}_s^0}$ 之定义易得：

$$P(x_t=j\mid\overline{\mathscr{F}_s^0})=p_{x_sj}(s,t)\quad a.e.\ [P]\ (0\leq s<t).\tag{2.5}$$

由命题2.1（i）知：对任意 $0\leq r<t$，存在点列 $\{s_n\}$，使得 $t>s_n\downarrow r$，且 $x_{s_n}\to x_r$ $(n\to\infty)$ $a.e.$ $[P]$. 故由I中元素的离散性，利用命题2.1(ii)可得：

$$\lim_{n\to\infty}p_{x_{s_n}j}(s_n,t)=p_{x_rj}(r,t)\quad a.e.\ [P]\tag{2.6}$$

另一方面，由鞅收敛定理[7]知：

$$\lim_{n\to\infty}P(x_t=j\mid\overline{\mathscr{F}_{s_n}^0})=P\Big(x_t=j\,\Big|\,\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathscr{F}_{s_n}^0}\Big)=P\Big(x_t=j\,\Big|\,\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^0}\Big)\quad a.e.[P].\tag{2.7}$$

从而，由（2.6）与（2.7），利用（2.5）式得：

$$P\Big(x_t=j\,\Big|\,\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^0}\Big)=P(x_t=j\mid\overline{\mathscr{F}_r^0})\quad a.e.\ [P].\tag{2.8}$$

用证明（2.8）式的方法可得：对任意 $l\geq 1$，$r<t_1<t_2<\cdots<t_l$，$\{j_1,\cdots j_l\}\subset$ I 有

$$P(\Lambda\mid\overline{\mathscr{F}_r^0})=P\Big(\Lambda\,\Big|\,\bigcap_{s>r}\mathscr{F}_s^0\Big)\quad a.e.\ [P]\tag{2.9}$$

进而，利用 $\lambda-\pi$ 类方法易证（2.9）式对任意 $\Lambda\in\overline{\mathscr{F}_\infty^0}$ 成立，其中 $\mathscr{F}_\infty^0=\sigma(x_u:u\geq 0)$. 特别当 $\Lambda\in\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^0}$，则有 $P(\Lambda\mid\overline{\mathscr{F}_r^0})=\chi_\Lambda(\omega)$ $a.e.$ $[P]$. 故 $\chi_\Lambda(\omega)$ 为 $\overline{\mathscr{F}_r^0}$ 上的 $a.e.$ 可测函数，

*）意指将 $\mathscr{F}_t^s$ 添加一切零概集后，再完备化.

而$\overline{\mathscr{F}_r^0}$含有一切零概集，必有$\chi_\Lambda(\omega)$关于$\overline{\mathscr{F}_r^0}$可测，即$\Lambda\in\overline{\mathscr{F}_r^0}$．由此不难推知：

$$\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^0}=\overline{\mathscr{F}_r^0}\ ,\qquad (2.10)$$

亦即$\{\overline{\mathscr{F}_s^0}:t\geq 0\}$是$\mathscr{F}$的右连续子$\sigma$域族．进而利用（2.5）式易证：$\{\overline{\mathscr{F}_t^0}:t\geq 0\}$为X的一个可取参考系．

由定义2.3中的条件（i）、定义2.2中的条件（ii）及（i）即知$\{\overline{\mathscr{F}_t^0}:t\geq 0\}$为X的最小可取参考系．■

系2.1 右标准马氏链必服从右无穷近0－1律[5]．

证 对任意$r\geq 0$，令$X^{(r)}=\{x_u: u\geq r\}$，则$X^{(r)}$为右标准马氏链，由（2.10）式知：$\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^r}=\overline{\mathscr{F}_r^r}=\overline{\sigma(x_r)}$．又$\bigcap_{s>r}\overline{\mathscr{F}_s^r}\supset\left(\overline{\bigcap_{s>r}\mathscr{F}_s^r}\right)=(\overline{\mathscr{F}^r_{r+0}})$，故$(\overline{\mathscr{F}^r_{r+0}})\subset\overline{\sigma(x_r)}$．

对任意$i\in I$，$A\in\overline{\sigma(x_r)}$，$p_{ri}(A)=0$或1，由此及$r$的任意性即知：对X右无穷近0－1律成立．■

以下恒设$\{\mathscr{F}_t: t\geq 0\}$为X的一个可取参考系．设$a(\cdot)$为$\Omega$上的非负函数（可取$\infty$值），若对任意$t\geq 0$有：

$$(\omega: a(\omega)<t)\in\mathscr{F}_t\ ,\qquad (2.11)$$

则称a为$\{\mathscr{F}_t: t\geq 0\}$停时，简称为停时．利用$\{\mathscr{F}_t: t\geq 0\}$的右连续性易证：（2.11）式与下面的条件等价：对任意$t\geq 0$，有$(\omega: a(\omega)\leq t)\in\mathscr{F}_t$．

记$\mathscr{F}_a=\{\Lambda: \Lambda\subset\Delta, \Lambda\cap(a<t)\in\mathscr{F}_t,\ t\geq 0\}$，则$\mathscr{F}_a$为上的$\sigma$域，其中$\Delta=(\omega: a(\omega)<\infty)$，本文假定$P(\Delta)>0$．利用$\{\mathscr{F}_t: t\geq 0\}$的右连续性易证：

$$\mathscr{F}_a=\{\Lambda: \Lambda\subset\Delta, \Lambda\cap(a\leq t)\in\mathscr{F}_t,\ t\geq 0\}$$

为使X存在可分修正，我们需要引入一个附加状态$\{\infty\}$，此处可理解其为通常的无穷大．记$\overline{I}=I\cup\{\infty\}$．

对任意$0\leq s<t$，$i\in I$，令

$$p_{\infty\infty}(s,t)=1\ ,\ p_{i\infty}(s,t)=p_{\infty i}(s,t)=0\ ,$$

则$(p_{ij}(s,t): i,j\in\overline{I},\ 0\leq s<t)$仍为一右标准转函．

因$\mathscr{F}_t$（$t\geq 0$）含有一切零概集且$(\Omega,\mathscr{F},P)$为完备概率空间，故对X的任何修正过程，$\{\mathscr{F}_t: t\geq 0\}$也是可取参考系．

由命题2.1易证：若X为可分右标准马氏链，则它必完全可分．

命题2.3 设X为可分右标准马氏链，则对$a.e.\omega$及任意$t\geq 0$，当$s\downarrow t$时，$x(s,\omega)$至多只有一个有限的极限点．

证 仿〔2〕定理4之证可得．■

命题2.4 设X为可分右标准马氏链，则对任意$t\geq 0$，$i\in I$，$a.e.\omega\in(x_t=i)$有：

（i）若$V_i(t+0)<\infty$，则$\lim\limits_{s\downarrow t}x(s,\omega)=i$；

（ii）若$V_i(t+0)=\infty$，则$x(s,\omega)$当$s\downarrow t$时有且仅有两个极限点i和∞．

其中$V_i(t+0)=\lim\limits_{h\downarrow 0}V_i(t,t+h)$，而$V_i(t,t+h)$是$p_{ii}(s,u)$在$[t,t+h]$上的变差

（详见〔1〕§4）.

证明仿〔2〕定理5之证可得. ■

命题2.5 设X为可分右标准马氏链，则对任意$t\geq 0$有：

$$\lim_{s\downarrow t} x(s,\omega)=x(t,\omega)\quad a.e.\ [P]. \tag{2.12}$$

进而有：

$$(\omega: t\in S_i^+(\omega))\doteq(\omega: t\in \mathrm{S}_i(\omega))\quad (i\in \mathrm{I}), \tag{2.13}$$

即两个集合之对称差为一零概集，其中

$\mathrm{S}_i(\omega)=\{u: x(u,\omega)=i\}$，$\mathrm{S}_i^+(\omega)=\{u: u,u+\varepsilon)\cap \mathrm{S}_i(\omega)\neq\phi,\varepsilon>0\}$.

证 利用命题2.4，注意到I至多可数以及$P(x_t=\infty)=0$，即得（2.12）式.

由（2.12）式，利用命题2.3即可证得(2.13）式. ■

定义2.4 若马氏链X可分、Borel 可测、右下半连续、右标准，则称其为右正则马氏链.

命题2.6 任何右标准马氏链均有右正则修正.

证 注意到右标准马氏链的可分修正仍为右标准马氏链，由（2.12）式，利用〔8〕TheoremⅡ7.1 即可证得此命题. ■

当X为Borel 可测过程时，易证$\mathrm{X}_a=\{x(a+t): t\geq 0\}$为概率空间$(\triangle,\mathscr{F}|_\Delta,P_\Delta)$上的随机过程，称其为X的$a$-推移过程，其中$\mathscr{F}|_\Delta=\{\mathrm{A}\cap\Delta; \mathrm{A}\in\mathscr{F}\}$，$P_\Delta(\cdot)=P(\cdot|\Delta)$.记$\zeta(t)\equiv x(a+t)$ （$t\geq 0$），而称

$$\mathscr{F}_a\equiv\sigma(\zeta_t: t\geq 0)$$

为X的a-后σ域.

本文以下假定X为右正则马氏链，若不加声明，所涉及的状态均非无穷.

§3 推移过程的有穷维分布

本节最终给出X的推移过程$\{\zeta_t: t\geq 0\}$的有穷维分布，为此我们需先来叙述几个中间结果.

令：

$$\gamma_j(\omega)=\begin{cases}\inf\{t: a(\omega)<t,\ x_t=j\}, \\ \infty \qquad 若上集空,\end{cases} \tag{3.1}$$

则由X的可分性知γ_j为停时.

设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，而以$\mu(\Lambda;\cdot)$表示由分布函数$P(\Lambda; a\leq s)$产生的L－S测度，则由规则条件概率的存在性定理或见〔9〕p29，知存在$[0,\infty]\times\mathscr{B}_1$上的非负函数$c_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$，适合：

（i）$c_j(\cdot,\mathrm{B}|\Lambda)$是Borel 可测函数（$B\in\mathscr{B}_1$）;

（ii）$c_j(\mathrm{S},\cdot|\Lambda)$是$\mathscr{B}_1$上的概率测度（$s\geq 0$）;

$$\text{(iii)}\ c_j(\mathrm{S},\mathrm{B}|\Lambda)=P(\gamma_j\in \mathrm{B}|\Lambda; a=s)\quad a.e.\ [\mu(\Lambda,\cdot)]. \tag{3.2}$$

定理3.1 设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，$P(\Lambda)>0$，$t\geq 0$，则

$$P(x_t=k|\Lambda; a,\gamma_j)=p_{jk}(\gamma_j,t)\quad a.e.\ [P_{\Lambda\cap(\gamma_j\leq t)}]$$

证 由命题2.1，$p_{jk}(\cdot,t)$为$[0,t)$上的右连续函数，故$p_{jk}(\gamma_j,t)$在$\Lambda\cap(\gamma_j\leq t)$

上关于$\sigma(\gamma_j, a)|_{\Lambda\cap(\gamma_j\le t)}$可测.

对任意 $0\le s$，$s'\le t$ 有：

$$\Lambda\cap(a\le s,\ \gamma_j\le s',\ x_t=k)=\ (\Lambda_1\cup\Lambda_2)\cap(x_t=k),$$

其中 $\Lambda_1=\Lambda\cap(a\le s, \gamma_j\le s', \gamma_j\neq t)$, $\Lambda_2=\Lambda\cap(a\le s, \gamma_j\le s', \gamma_j=t)$.

由 (3.1) 式知：$(\gamma_j=t)\subset(\omega: t\in S_j^+(\omega))$，又由命题2.5中的 (2.13) 式知：$(\omega: t\in S_j^+(\omega))\doteq(\omega: t\in S_j(\omega))$，从而有：

$$P(\Lambda_2,\ x_t=k)=\delta_{jk}P(\Lambda_2)=\int_{\Lambda_2}p_{jk}(\gamma_j,t)\mathrm{d}p \tag{3.3}$$

下面计算 $P(\Lambda_1,\ x_t=k)$，为此令

$$\gamma_j^{(n)}(\omega)=\begin{cases}\inf\{\frac{m}{2^n}: \gamma_j(\omega)<\frac{m}{2^n},\ x(\frac{m}{2^n},\omega)=j\},\\ \infty \qquad 若上集空,\end{cases}$$

则$\gamma_j^{(n)}$为停时，且对$a.e.\ \omega\in(\gamma_j<\infty)$ 有$\gamma_j^{(n)}(\omega)\downarrow\gamma_j(\omega)$. 故

$$P(\Lambda_1,x_t=k)=\lim_{n\to\infty}p(\Lambda.\ a\le s,\ \gamma_j\le s',\ \gamma_j^{(n)}<t;\ x_t=k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m<2^n\cdot t}P(\Lambda,a\le\min\{s,s',\frac{m}{2^n}\},\gamma_j\le\min\{s',\frac{m}{2^n}\},\ \gamma_j^{(n)}=\frac{m}{2^n},\ x_t=k).$$

由$\gamma_j^{(n)}$定义知，当$\gamma_j^{(n)}<\infty$时，$x(\gamma_j^{(n)})=j$，据此利用 (2.4) 式得：

$$P(\Lambda_1,x_t=k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m<2^n\cdot t}P(\Lambda,a\le s,\gamma_j\le s',\ \gamma_j^{(n)}=\frac{m}{2^n})\cdot p_{jk}(\frac{m}{2^n},t)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{(\Lambda,\,a\le s,\,\gamma_j\le s',\,\gamma_j^{(n)}<t)}p_{jk}(\gamma_j^{(n)},t)\mathrm{d}p=\int_{\Lambda_1}p_{jk}(\gamma_j,t)\mathrm{d}p. \tag{3.4}$$

故由 (3.3) 及 (3.4) 式可得：

$$P(\Lambda,a\le s,\gamma_j\le s',x_t=k)=\int_{(\Lambda,\,a\le s,\,\gamma_j\le s')}p_{jk}(\gamma_j,t)\mathrm{d}p.$$

据此利用$\lambda-\pi$类方法可证：对任意$A\in\sigma(a,\gamma_j)|_{(\gamma_j\le t)}$有

$$P(\Lambda,A,x_t=k)=\int_{\Lambda\cap A}p_{jk}(\gamma_j,t)\mathrm{d}p. \quad ∎ \tag{3.5}$$

定理3.2 设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$, $P(\Lambda)>0$，$t\ge 0$ 则

(i) $P(x_t=j\,|\Lambda; a=s)=r_j(s,t\,|\Lambda)\quad a.e.\ [\mu(\Lambda;\ \cdot)]\ s\in[0,t]$，其中

$$r_j(s,t\,|\Lambda)=\int_{[s,t]}p_{jj}(u,t)c_j(s,\mathrm{d}u\,|\Lambda);$$

(ii) $r_j(s,\cdot|\Lambda)$为$[s,\infty)$上的右连续函数，且$r_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$为二元Borel 可测函数.

证 对$u>t$，令$p_{jj}(u,t)=0$，则在Λ上，$p_{jj}(\gamma_j,t)$关于$\sigma(a,\gamma_j)|_\Lambda$可测.

利用 (2.13) 式得：

$(x_t=j)\cap(a\le t)=(\omega: t\in S_j(\omega))\cap(a\le t)=(\omega: t\in S_j^+(\omega))\cap(a\le t)\subset(\gamma_j\le t)$.

故对任意 $0\le s\le t$，$s'\ge 0$ 有 $P(\Lambda,a\le s,\gamma_j\le s',x_t=j)=P(\Lambda,a\le s,\gamma_j\le s',a\le t,x_t=j)$

$$=P(\Lambda,a\leq s,y_j\leq\min\{s',t\},x_t=j)=\int_{(\Lambda,a\leq s,y_j\leq\min\{s',t\})}p_{jj}(y_j,t)\mathrm{d}p=\int_{(\Lambda,a\leq s,y_j\leq s')}p_{jj}(y_j,t)\mathrm{d}p$$

后两个等号分别由（3.5）式及$p_{jj}(u,t)=0\ (u>t)$ 得到.

综上即知: $P(x_t=j\,|\Lambda;a,y_j)=p_{jj}(y_j,t)\quad a.e.\ [P_{\Lambda\cap(a\leq t)}]$.

从而有:

$$P(x_t=j\,|\Lambda;a)=E\{P(x_t=j\,|\Lambda;a,y_j)\,|\Lambda;a\}=E\{p_{jj}(y_j,t)\,|\Lambda;a\}\quad a.e.[P_{\Lambda\cap(a\leq t)}] \tag{3.6}$$

注意到当 $s\leq t$ 时有$P(\Lambda\cap(a\leq t);a\leq s)=P(\Lambda;a\leq s)$，由（3.6）式得：对$a.e.$ $[\mu(\Lambda;\ \cdot)]$,$s\in[0,t]$ 有

$$P(x_t=j\,|\Lambda;a=s)=E\{p_{jj}(y_j,t)\,|\Lambda;a=s\}. \tag{3.6$'$}$$

由（3.2）式，利用$\mathscr{L}-\mathscr{H}$系方法[3]可证：对任意有界Borel 可测函数f有:

$$E\{f(y_j)\,|\Lambda;a=s\}=\int_0^{\infty}f(u)c_j(s,\mathrm{d}u\,|\Lambda), \tag{3.7}$$

又$y_j\geq a$ 且$p_{jj}(u,t)=0(u>t)$，故由（3.7）式得

$$E\{p_{jj}(y_j,t)\,|\Lambda;a=s\}=\int_{[s,t]}p_{jj}(u,t)c_j(s,\mathrm{d}u\,|\Lambda).$$

由此及（3.6）$'$ 知（i）成立.

利用$p_{jj}(u,t)$关于t右连续及测度上连续即可证得$r_j(s,\cdot|\Lambda)$为$[s,\infty)$上的右连续函数. $r_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$的Borel 可测性可由$p_{jj}(u,\cdot)$及$c_j(\cdot,B)$ ($B\in\mathscr{B}_1$) 的相应性质推出. ■

定理3.3 设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$, $P(\Lambda)>0$，则

$$r_k(s,t\,|\Lambda)=\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)\cdot p_{jk}(u,t)\quad a.e.\ [\mu(\Lambda;\ \cdot)]s,\ t\geq u>s.$$

且
$$\sum_j r_j(s,t\,|\Lambda)=1\quad a.e.\ [\mu(\Lambda;\ \cdot)]s,\ t>s.$$

证 由$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，利用（2.4）式得;对任意$t\geq u\geq s$

$$P(\Lambda;a\leq s,x_t=k)=\sum_j P(\Lambda;a\leq s,x_u=j)p_{jk}(u,t),$$

从而

$$P(x_t=k\,|\Lambda;a)=\sum_j P(x_t=j\,|\Lambda;a)p_{jk}(u,t)\quad a.e.\quad [P_{\Lambda\cap(a\leq u)}].$$

据此利用定理3.2(i) 得：对任意$t\geq u$，$a.e.[\mu(\Lambda;\ \cdot)]s\in[0,u]$，有

$$r_k(s,t\,|\Lambda)=\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)\cdot p_{jk}(u,t). \tag{3.8}$$

由Fubini 定理知：（3.8）式对$a.e.[\mu(\Lambda;\ \cdot)]s$ 以及$a.e.[L\times L](u,t)\in\{(v_1,v_2):s\leq v_1\leq v_2\}$ 成立（L 为勒贝格测度）. 进而有

$$r_k(s_1,t\,|\Lambda)\geq\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)p_{jk}(u,t)\quad a.e.\ [\mu(\Lambda;\ \cdot)]s,t\geq u\geq s. \tag{3.9}$$

事实上，对$a.e.[\mu(\Lambda;\ \cdot)]s$，$t\geq u\geq s$，可找到点列$\{(u_n,t_n):s\leq u_n\leq t_n\}_{n\geq1}$ 使得$u_n\downarrow u,t_n\downarrow t$，且$(s,u_n,t_n)$ 使（3.8）式成立，由定理3.2(ii) 及法杜引理即知（3.9）式

成立.

由（3.9）式对k求和得：

$$\sum_k r_k(s,t\,|\Lambda)=\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\ t\geq u\geq s. \tag{3.10}$$

由定理3.2(i)知：对任意$t\geq 0$有

$$\sum_j r_j(s,t\,|\Lambda)=P(\Lambda\,|\Lambda;a=s)=1\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s\in[0,t].$$

再利用 Fubini 定理得：

$$\sum_j r_j(s,t\,|\Lambda)=1\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\quad a.e.[L]t\geq s. \tag{3.11}$$

据此利用定理3.2（ii）及法杜引理得：

$$\sum_j r_j(s,t\,|\Lambda)\leq 1\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\quad t\geq s. \tag{3.12}$$

以N_0表示使（3.10）或（3.12）式不成立的s点集，则$\mu(\Lambda;N_0)=0$. 对任意$s\in N_0^c$，若某$u\geq s$使（3.12）式取等号，则由（3.10）式，对任意$t\geq u$，（3.12）式也取等号；再由（3.11）式，对任意$t>s$，必存在$u\in[s,t]$，使（3.12）式取等号，故有

$$\sum_j r_j(s,t\,|\Lambda)=1\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\ t>s,$$

从而 $\sum_k r_k(s,t\,|\Lambda)=\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)=1\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\ t\geq u>s.$

最后由（3.9）式，用反证法可得：

$$r_k(s,t\,|\Lambda)=\sum_j r_j(s,u\,|\Lambda)\cdot p_{jk}(u,t)\quad a.e.[\mu(\Lambda;\cdot)]s,\ t\geq u>s. \quad ∎$$

对$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，令

$$r_j(\Lambda;t)=\int_0^\infty r_j(s,s+t\,|\Lambda)\mu(\Lambda;ds)\ (t\geq 0).$$

利用定理3.2 及定理3.3，据控制收敛定理及 Fubini 定理易证：

（i）$r_j(\Lambda;\cdot)$ 在$[0,\infty)$上右连续；

(ii) $$\sum_j r_j(\Lambda;t)=\mu(\Lambda;[0,\infty))=P(\Lambda),\ (t>0). \tag{3.13}$$

有了以上的准备工作，现在我们可以来证明本节的主要结论：

定理3.4 设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，$P(\Lambda)>0$，$N\geq 0$为整数，$0\leq t_0<t_1<\cdots<t_N$，$\{j_0,j_1,\cdots,j_N\}\subset I$，则

$$P(\Lambda;\zeta_{t_\nu}=j_\nu,0\leq\nu\leq N)=\int_0^\infty r_{j_0}(s,s+t_0\,|\Lambda)\prod_{\nu=1}^N p_{j_{\nu-1}j_\nu}(s+t_{\nu-1},s+t_\nu)\mu(\Lambda;ds) \tag{3.14}$$

当$N=0$时，理解（3.14）式为：

$$P(\Lambda;\zeta_{t_0}=j_0)=r_{j_0}(\Lambda;t_0)$$

证　令$\mathrm{B}_n=\Lambda\cap\bigcup_{m=0}^{\infty}(\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n};\ x(\frac{m+1}{n}+t_\nu)=j_\nu,\ 0\le\nu\le N)$。若$\omega$属于无穷多个$\mathrm{B}_n$，则存在$r_k\downarrow a(\omega)$且有$x(r_k+t_\nu)=j_\nu$（$0\le\nu\le N$），据此利用命题2.3及X的右下半连续性可得：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathrm{B}_n\subset\Lambda\cap(\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\le\nu\le N)\ ,\tag{3.15}$$

即对$a.e.[P]\omega\in\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathrm{B}_n$，有$\omega\in\Lambda\cap(\xi_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\le\nu\le N)$。

由$\Lambda\in\mathscr{F}_a$及（2.4）式，利用定理3.2及积分转化定理[3]可得：

$$P(\mathrm{B}_n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(\Lambda;\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n},\ x(\frac{m+1}{n}+t_\nu)=j_\nu\ \ 0\le\nu\le N)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P(\Lambda;\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n},\ x(\frac{m+1}{n}+t_0)=j_0)\cdot\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(\frac{m+1}{n}+t_{\nu-1},\frac{m+1}{n}+t_\nu)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n}}P(x(\frac{m+1}{n}+t_0)=j_0\mid\Lambda;a)\mathrm{d}p\cdot\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(\frac{m+1}{n}+t_{\nu-1},\frac{m+1}{n}+t_\nu)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{m}{n}\le a<\frac{m+1}{n}}r_{j0}(a,\frac{m+1}{n}+t_0\mid\Lambda)\mathrm{d}p\cdot\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(\frac{m+1}{n}+t_{\nu-1},\frac{m+1}{n}+t_\nu)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})}r_{j_0}(s,\frac{m+1}{n}+t_0|\Lambda)\mathrm{d}p\mu(\Lambda;\mathrm{d}s)\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(\frac{m+1}{n}+t_{\nu-1},\frac{m+1}{n}+t_\nu)$$

$$=\int_0^{\infty}r_{j_0}(s,\frac{[ns]+1}{n}+t_0\mid\Lambda)\cdot\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(\frac{[ns]+1}{n}+t_{\nu-1},\frac{[ns]+1}{n}+t_\nu)\mu(\Lambda;\mathrm{d}s),$$

其中$[ns]$为不大于ns的最大整数。

故由命题2.1(ii)，利用控制收敛定理得：

$$\lim_{n\to\infty}P(\mathrm{B}_n)=\int_0^{\infty}r_{j_0}(s,s+t_0\mid\Lambda)\cdot\prod_{\nu=1}^{N}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(s+t_{\nu-1},\ s+t_\nu)\mu(\Lambda;\mathrm{d}s).$$

再由（3.15）式知：

$$P(\Lambda;\zeta_{t_\nu}=j_\nu,0\le\nu\le N)\ge\int_0^{\infty}r_{j0}(s,s+t_0\mid\Lambda)\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty}p_{j_{\nu-1}j_\nu}(s+t_{\nu-1},s+t_\nu)\cdot\mu(\Lambda;\mathrm{d}s)\tag{3.16}$$

若某组$\{j_0,\cdots,j_N\}$使（3.16）式之等号不成立，则对$j_1,\cdots,j_N$的所有可能状态求和得：

$$P(\Lambda;\zeta_{t_0}=j_0)>r_{j_0}(\Lambda;t_0).\tag{3.17}$$

再对j_0求和得：$P(\Lambda)\ge\sum_{j_0}P(\Lambda;\zeta_{t_0}=j_0)>\sum_{j_0}r_{j_0}(\Lambda,t_0)$当$t_0>0$时，此与（3.13）式矛盾，故当$t_0>0$时必有（3.16）式取等号，即（3.14）式成立。

下证当$t_0=0$时，（3.17）式中“$>$”应为“$=$”从而完成定理证明。

若有ω 使得$x(a(\omega),\omega)=j_0$，则由X的右下半连续性知：存在$\{u_n\}_{n\geq 1}$，适合$u_n\downarrow a(\omega)$且$x_{u_n}(\omega)=j$，从而有$\gamma_{j0}(\omega)=a(\omega)$；反之由命题2.3 及X的右下半连续性知：对$a.e.\omega$，若$\gamma_{j0}(\omega)=a(\omega)$，则 $\zeta_0(\omega)=j_0$，综合两个方面即得：$(\zeta_0=j_0)\doteq(\gamma_{j0}=a)$. 故有

$$P(\Lambda;\zeta_0=j_0)=P(\Lambda;\ \gamma_{j0}=a) \tag{3.18}$$

由（3.2）式知：

$$c_{j_0}(a,\mathrm{B}\,|\Lambda)=P(\gamma_{j_0}\in\mathrm{B}\,|\Lambda;a)\quad a.e.[P]\quad (\mathrm{B}\in\mathscr{B}_1).$$

故对任意$\mathrm{B}'\in\mathscr{B}_1$ 有：

$$P(\gamma_{j_0}\in\mathrm{B},a\in\mathrm{B}',\Lambda)=\int_{\mathrm{B}'}c_{j_0}(s,\mathrm{B}\,|\Lambda)\mu(\Lambda;ds).$$

由此利用$\lambda-\pi$ 类方法可证：

$$P(\Lambda;(a,\gamma_{j_0})\in\mathrm{B}_0)=\int_0^\infty c_{j_0}(s,\mathrm{B}_0^{(s)}\,|\Lambda)\mu(\Lambda;ds),$$

其中$\mathrm{B}_0\in\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_1$，$\mathrm{B}_0^{(s)}=\{u:(s,u)\in\mathrm{B}_0\}$.

由上式，再注意到$r_{j_0}(s,s\,|\Lambda)=c_{j_0}(s,\{s\}\,|\Lambda)$得

$$P(\Lambda;\gamma_{j_0}=a)=\int_0^\infty c_{j_0}(s,\{s\}\,|\Lambda)\mu(\Lambda;ds)=r_{j_0}(\Lambda;0)$$

再由（3.18）式即知：当$t_0=0$时，（3.17）式应取等号. ■

定理3.5 设$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，$P(\Lambda)>0$，则

（i）ζ_t于Λ上$a.e.$有限，即$P(\Lambda;\zeta_t<\infty)=P(\Lambda)\ (t>0)$；

（ii）$\{\mathscr{F}_{a+t}:\ t\geq 0\}$右连续，且$\zeta_t$关于$\mathscr{F}_{a+t}$可测（$t\geq 0$）.

证 由定理3.4 得：$P(\Lambda;\zeta_t=j)=r_j(\Lambda;t)$. 再利用（3.13）式便证得（i）.

由$\{\mathscr{F}_t:\ t\geq 0\}$的右连续性即可推知$\{\mathscr{F}_{a+t}:\ t\geq 0\}$右连续.

注意到（3.16）式必取等号，利用（3.15）可得：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mathrm{B}_n\doteq(\Lambda;\zeta_{t_\nu}=j_\nu\ 0\leq\nu\leq N)$ 取 $N=0$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\mathrm{B}_n\in\bigcap\limits_{s>t_0}\mathscr{F}_{a+s}=\mathscr{F}_{a+t_0}$. 再由$\mathscr{F}_t\ (t\geq 0)$含有一切零概集知：$\mathscr{F}_{a+t}(t\geq 0)$含有一切零概集. 故有$(\Lambda;\zeta_{t_0}=j_0)\in\mathscr{F}_{a+t_0}$，即（ii）成立. ■

§4 强 马 氏 性

定理4.1 若存在j及a使$P(\zeta_0=j)=1$，则

$$P(\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N\,|\Lambda)=P(\xi_{t_\nu}=j_\nu,0\leq\nu\leq N)\quad(\Lambda\in\mathscr{F}_a). \tag{4.1}$$

从而$\mathscr{F}_a$与$\mathscr{A}_a$独立.

证 令$a_n(\omega)=\begin{cases}\inf\{\frac{m}{2^n};\ a(\omega)<\frac{m}{2^n},\ \ x(\frac{m}{2^n},\ \omega)=j\}, \\ \infty \qquad\qquad 若上集空,\end{cases}$

则a_n为离散停时，且由X的完全可分性及右下半连续性，利用$P(\xi_0=j)=1$得：

$$a_n\downarrow a\quad a.e.[P].$$

因$a<a_n$，故$\Lambda\cap\Delta_n\in\mathscr{F}_{a_n}$，其中$\Delta_n=(a_n<\infty)$. 显然$P(\Delta_n;\xi_0^{(n)}=j)=P(\Delta_n)$，其中$\xi_t^{(n)}=$

$x(a_n+t)(t\geq 0)$.

由〔6〕引理5.4 及$P_{\Delta_n}(\xi_0^{(n)}=j)=1$得：

$$P_{\Delta_n}(\xi_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N\ |\Delta_n\Lambda)=P_{\Delta_n}(\xi_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N),$$

亦即：

$$P(\Delta_n\Lambda;\ \xi_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N)=P(\Delta_n\Lambda)\cdot P(\Delta_n;\xi_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu\ \ 0\leq\nu\leq N). \qquad (4.2)$$

若以$r_j^{(n)}$及$\mu^{(n)}$分别表示对应于a_n的r_j及μ，则由定理3.4 有：

$$P(\Delta_n\Lambda;\ \zeta_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu,\ \ 0\leq\nu\leq N)=P(\Delta_n\Lambda;\zeta_0^{(n)}=j,\ \ \zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ \ 0\leq\nu\leq N) \qquad (4.3)$$

$$=\int_0^\infty r_j^{(n)}(s,s\ |\Delta_n\Lambda)\cdot p_{jj_0}(s,s+t_0)\cdot\prod_{\nu=1}^N p_{j_{\nu-1}j_\nu}(s+t_{\nu-1},s+t_\nu)\mu^{(n)}(\Delta_n\Lambda;ds).$$

因$P(\Delta_n\Lambda)=P(\Delta_n\Lambda;\zeta_0^{(n)}=j)=\int_0^\infty r_j^{(n)}(s,s\ |\Delta_n\Lambda)\mu^{(n)}(\Delta_n\Lambda;ds)$,

故有 $r_j^{(n)}(s,s\ |\Delta_n\Lambda)=1\quad a.e.\ [\mu^{(n)}(\Delta_n\Lambda;\ \cdot)]$.

从而由（4.3）式，利用积分转化定理、命题2.1及控制收敛定理有：

$$\lim_{n\to\infty}P(\Delta_n\Lambda;\ \zeta_{t_\nu}^{(n)}=j_\nu,\ \ 0\leq\nu\leq N)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty p_{jj_0}(s,s+t_0)\cdot\prod_{\nu=1}^N p_{j_{\nu-1}j_\nu}(s+t_{\nu-1},s+t_\nu)\cdot\mu^{(n)}(\Delta_n\Lambda;ds)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{\Delta_n\Lambda}p_{jj_0}(a_n,a_n+t_0)\cdot\prod_{\nu=1}^N p_{j_{\nu-1}j_\nu}(a_n+t_{\nu-1},a_n+t_\nu)dP$$

$$=\int_\Lambda p_{jj_0}(a,a+t_0)\cdot\prod_{\nu=1}^N p_{j_{\nu-1}j_\nu}(a+t_{\nu-1},a+t_\nu)dP=P(\Lambda;\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ \ 0\leq\nu\leq N).$$

由此利用（4.2）式得：

$$P(\Lambda;\ \zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ \ 0\leq\nu\leq N)=P(\Lambda)\cdot P(\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N)$$

故（4.1）式成立。

由（4.1）式，利用$\lambda-\pi$类方法易证$\mathscr{F}_a$与$\mathscr{F}'_a$独立。 ∎

系4.1 设$\{a_n\}_{n\geq 1}$为一单增停时列，且对任意$n\geq 1$，存在j_n，使得$P(x(a_n)=j_n)=1$，则$\{\mathscr{F}'_{a_n}\cap\mathscr{F}_{a_{n+1}}\}_{n\geq 1}$为相互独立的$\sigma$域族。

证 对任意$m\geq 1$，$A_k\in\mathscr{F}'_{a_k}\cap\mathscr{F}_{a_{k+1}}$，$k=1,2,\cdots,m$有$\bigcap_{k=1}^{m-1}A_k\in\mathscr{F}_{a_m}$，$A_m\in\mathscr{F}'_{a_m}$。由此利用定理4.1，用归纳法即可证得此系。 ∎

定理4.2 若记$\Delta'\equiv(\xi_0<\infty)$，则

(i) $P(\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N\ |\Delta'\ \mathscr{F}_a)=P(\zeta_{t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq N\ |\Delta'\ \zeta_0)$;

(ii) $P(A\ |\Delta'\ \mathscr{F}_a)=P(A\ |\Delta'\ \zeta_0)$, $A\in\mathscr{F}'_a$;

(iii) $E(y\ |\Delta'\ \mathscr{F}_a)=E(y\ |\Delta'\ \zeta_0)$，$y$为有界、$\mathscr{F}'_a$可测函数；

(iv) $P(\Lambda A\ |\Delta'\ \mathscr{F}_a)=P(\Lambda\ |\Delta'\ \zeta_0)\cdot P(A\ |\Delta'\ \zeta_0)$, $\Lambda\in\mathscr{F}_a$, $A\in\mathscr{F}'_a$.

证 （i）—（iv）相互等价，故下面我们仅证（ii）成立. 易证：在Δ_j上，$P(A|\Delta'\zeta_0)=P(A|\Delta'\cap(\zeta_0=j))$，其中$\Delta_j=(\zeta_0=j)$.

对任意$\Lambda\in\mathscr{F}_a$，由定理4.1知：

$$P_{\Delta_j}(A\Lambda)=P_{\Delta_j}(A)\cdot P_{\Delta_j}(\Lambda)$$

故

$$\int_{\Delta'\Lambda}P(A|\Delta'\mathscr{F}_a)dp=P(A\Delta'\Lambda)=\sum_j P(\Delta_j)\cdot P_{\Delta_j}(A\Lambda)$$

$$=\sum_j P(\Delta_j)\cdot P_{\Delta_j}(A)\cdot P_{\Delta_j}(\Lambda)=\sum_j P_{\Delta_j}(A)\cdot P(\Delta_j\Lambda)$$

$$=\sum_j P_{\Delta_j}(\Delta_j\Delta'\Lambda)\cdot P_{\Delta_j}(A)=\sum_j\int_{\Delta_j\Delta'\Lambda}P(A|\Delta'\cap(\zeta_0=j))dP$$

$$=\sum_j\int_{\Delta_j\Delta'\Lambda}P(A|\Delta'\zeta_0)dP=\int_{\Delta'\Lambda}P(A|\Delta'\zeta_0)dP.$$

再由定理3.5(ii)知：ζ_0关于$\mathscr{F}_a$可测，故证得定理. ■

系4.2 设$t>0$，则

$$P(\Lambda A|\mathscr{F}_{a+t})=P(\Lambda|\zeta_t)\cdot P(A|\zeta_t),\Lambda\in\mathscr{F}_{a+t},A\in\mathscr{F}'_{a+t}.$$

证明由定理4.2及定理3.5(i)即得.

因任意右连续过程必可分、Borel可测、右下半连续，故右标准马氏链若其右连续，则其必是右正则的，从而有：

系4.3 任意右标准马氏链，若其右连续，则其必具有强马氏性.

对任意$s\geq 0$，本文以上的结果均可平移到过程$X^{(s)}=\{x_t: t\geq s\}$上，这一点是容易验证的.

朱成熹老师仔细阅读了手稿并提出具体的修改意见，作者在此特向朱老师致谢!

参 考 文 献

〔1〕朱成熹，非齐次马尔科夫链的转移函数的分析性质，数学进展，vol.8, No.1 (1965).
〔2〕朱成熹，非齐次马尔科夫链样本函数的性质，南开大学学报（自然科学），vol.5, No.5 (1964).
〔3〕朱成熹，测度论基础，科学出版社 (1983).
〔4〕胡迪鹤，抽象空间中非时齐马氏过程的分析理论Ⅰ(Ⅱ)，数学学报，22.4(5)(1979).
〔5〕王梓坤，生灭过程与马尔科夫链，科学出版社 (1980).
〔6〕E.Б.邓肯，马尔科夫过程论基础（王梓坤译），科学出版社 (1962).
〔7〕严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社 (1981).
〔8〕K. L. Chung, Markov Chains with Stationary Transion Probabilities, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin. (1967).
〔9〕J.L. Doob, Stochastic Processes, New york (1953).

The Strong Markov Property of A Denumerable Markov Process

Bo Lianming
(Nankai University)

Abstract

If a Markov chain (M. C.) with continuous parameter is eseparable. Borel measurable. right lower semi-continuous and right standard, it is called a right regular one. This paper shows that every right standard M.C. (needn't be homogenerous) has a right regnlar version and that every right regular M. C. posesses strong Markov property by means of its post-process.