1988年5月

数学研究与评论
第八卷 第二期

序关系与0—1规划问题(上)*

彼得·哈默(Peter L.Hammer) 刘彦佩(Yanpei Liu)
(新泽西州立大学运筹中心) (中国科学院应用数学研究所)

提 要

本文在于总结研究序关系在0—1规划问题中的作用。依此，可将问题简化。特别地，可使一些在算法复杂性方面很难的问题变得容易。即，能用多项式阶的计算量求出其解或判定无解。例如，背包问题，集合组装问题和集合复盖问题等。

§1 引 言

对于0—1规划问题的研究，如人们所知，与运筹学中的整数规划密切相关。实际上，可以证明，任何一个整数规划问题均可化为0—1规划问题。因此，0—1规划与整数规划一样是组合最优化的一个重要分枝。

一般而言，整数规划乃至0—1规划的主要困难在如下二个方面：首先，如何判定一组整系数的不等式或方程是否有整数，甚至是仅取0或1的解；其次，就是当已知一组不等式或方程有整数，或仅取0或1的解之下，如何求出一个最优解。我们这里所说的困难是指时至今日尚未能确定是否可以建立一个算法使得能以一个仅依赖初始数据量的多项式为界的计算量，或者说，计算时间即求得出一个解或判定无解。从算法复杂性理论的角度，称那些有多项式界的算法求解的问题为P—问题。否则，就称为NP—问题．也就是我们这里所说的困难问题．有多项式界的计算量的算法称为有效算法．否则，无效算法．

由于0—1规划中的所有变量均取值0或1．自然，布尔代数和布尔方程的理论应该作为基础．因此，我们不能不介绍这方面的一些基本知识与结果．这就是§2和§3中的内容．

接着，在§4中，介绍有关0—1规划的一般理论．它们当然不可能导致一般问题的多项式界的算法．然而，当问题的规模较小时却是可以利用的．况且，它们还是解决一些特殊问题，或者研究一般问题变为P—问题的条件的理论基础．

之后，引进了0—1规划问题中变量间的二类序关系，常序关系与准序关系．从§5到§10全是研究在一些序关系的限制下的P—问题以及它们求解的有效算法的设计和研究一些本来是NP—问题，如集合组装（Set Packing）问题，集合复盖（Set Covering）问题以及背包（Knapsack）问题等转变为P—问题的条件．同时，也研究了这些条件的有效识别和在这些条件下问题的有效求解．

在§11中，研究另一类带有序限制0—1规划问题的有效性和有效算法的设计．这类问题是在研究如何判定一个图是否是平面图时发现的．

*1986年11月10日收到，本文分两期刊完，(下)在本刊下期中．

最后，在§12中，给出了目标函数为线性的一般0—1规划与§10中讨论的一类集合复盖问题等价.

§2 布 尔 代 数

布尔代数（Boolean Algebra）的发明者是十九世纪的英国数学家乔治·布尔（George Boole）. 它就由此而得名.

所谓布尔代数，实际上，就是具有如下性质P1—P7的数学系统，记之为$\mathscr{B}=(B; \vee, \wedge, \bar{\ })$. 其中$\wedge$，$\vee$为$B\times B\to B$，$\bar{\ }$为$B\to B$的映象，或称为运算：交，并，或补. $B=\{a,b,c,\cdots\}$是一个集合.

P1. 幂同律（Idempotent Law）：$\forall a\in B$，$a\wedge a=a\vee a=a$；

P2. 交换律（Commutative Law）：$\forall a,b\in B$，$a\wedge b=b\wedge a$，$a\vee b=b\vee a$；

P3. 结合律（Associative Law）：$\forall a,b,c\in B$，$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$，$a\vee b\vee c=(a\cap b)\cup c$；

P4. 吸收律（Absorption Law）：$\forall a,b\in B$，$a\wedge(a\vee b)=a\vee(a\wedge b)=a$；

P5. 分配律（Distributive Law）：$\forall a,b,c\in B$，$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$；

P6. 通界律（Universal Bound Law）：$\exists O$，$I\in B\in\forall a\in B$，

$$O\wedge a=O,\ O\vee a=a,\ I\wedge aa=a,\ I\vee a=I;$$

P7. 单补律（Unary Complemen' Law）：$\forall a\in B$，$\bar{a}$唯一确定，而且有$a\wedge\bar{a}=O$，$a\vee\bar{a}=I$.

由这些定律出发，可以导出很多有用的结果. 这里仅列出几个重要的.

首先，从布尔代数上述的定义，我们注意到运算$\wedge$和运算$\vee$；元素O和I是对称的. 并且不难导出如下几个定理.

定理2.1 在布尔代数$\mathscr{B}$中，一个元素$a\in B$，如果对任何$x\in B$，都有$a\wedge x=a$和$a\vee x=x$，则$a=O$；对称地，若对任何$x\in B$，都有$a\vee x=a$和$a\wedge x=x$，则$a=I$.

定理2.2 在布尔代数$\mathscr{B}$中，对于任何$a,b\in B$，$a\wedge b=a$，当且仅当$a\vee b=b$.

定理2.3 在布尔代数$\mathscr{B}$中，对a，x，$y\in B$，如果$a\wedge x=a\wedge y$和$a\vee x=a\vee y$则$x=y$.

定理2.4 在布尔代数$\mathscr{B}$中，对任何$x,y\in B$，有$\bar{\bar{x}}=x$；$\overline{(x\vee y)}=\bar{x}\wedge\bar{y}$；$\overline{(x\wedge y)}=\bar{x}\vee\bar{y}$.

由此，即可得到$\bar{O}=I$，和$\bar{I}=O$. 在布尔代数中，从任何一个有关$\wedge$，$\vee$，$\bar{\ }$，O，I的命题均可通过$\wedge$与$\vee$，O与I互换得到一个新的命题. 此二命题互称为对偶.

更重要地，可通过$a\wedge b=a$，或者由定理2.2，等价地$a\vee b=b$定义$\mathscr{B}$上的一个关系. 记之为$a\prec b$. 容易验证：$\prec$在$\mathscr{B}$上满足：

R1. 反身性（Reflexivity）：$\forall a\in B$，$a\prec a$；

R2. 反对称性（Antisymmetry）：$\forall a,b\in B$，$a\prec b$和$b\prec a\Rightarrow a=b$；

R3. 传递性（Transitivity）：$\forall a,b,c\in B$，$a\prec b$和$b\prec c\Rightarrow a\prec c$.

因此，$\prec$为$\mathscr{B}$上的一个序关系.

定理2.5 在布尔代数$\mathscr{B}$中，在序关系$\prec$之下，有而且仅有一个最小元，这就是O；有且仅有一个最大元，即I．且对于任何$a,b\in \mathrm{B}$，$\{a,b\}$ 在B中有且仅有一个下确界$\inf\{a,b\}$和有且仅有一个上确界$\sup\{a,b\}$，并有

$$a\wedge b=\inf\{a,\ b\},\quad a\vee b=\sup\{a,\ b\}.$$

现在，我们可以用一个有向图表示一个布尔代数．记$\vec{G}(\mathscr{B})=(\mathrm{B},\ \vec{E}(\mathscr{B}))$为表示$\mathscr{B}=(\mathrm{B};\vee,\ \wedge,\ \bar{\ })$的有向图．其中，

$$(a,b)\in\vec{E}(\mathscr{B})\Leftrightarrow a\prec b\text{且}\nexists c\in \mathrm{B},c\neq a,b,\quad a\prec c\prec b.$$

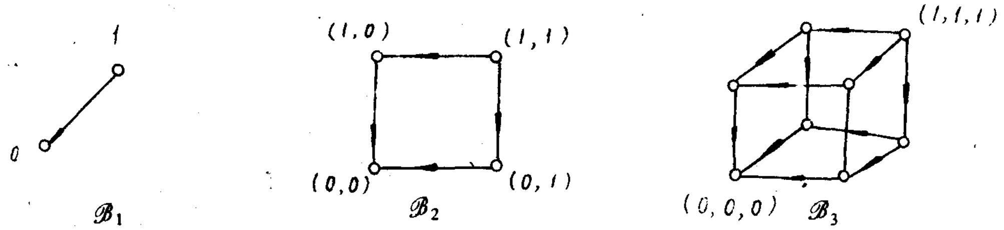
当然，不是任何一个有向图皆可表示一个布尔代数．事实上，可以证明，对于任何一个布尔代数$\mathscr{B}$，都存在一个整数s使得$|\mathrm{B}|=2^s$．再由于$\prec$的性质，只有s维的立方图才有可能表示布尔代数．若取$\mathrm{B}_1=\{0,1\}$，$\prec$就取为$\leqslant$，这时，所得的布尔代数记为$\mathscr{B}_1=(\mathrm{B}_1;\vee,\wedge,\bar{\ })$．自然，这时的$\wedge$，$\vee$，$\bar{\ }$如下表所示：

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

进而，还可构造有2^s个元素的布尔代数，记之为$\mathscr{B}_s=(\mathrm{B}_s;\ \wedge,\ \vee,\ \bar{\ })$．其中，$\mathrm{B}_s=\mathrm{B}_1\times \mathrm{B}_1\times\cdots\times \mathrm{B}_1$，有$s$个$\mathrm{B}_1=\{0,1\}$．对于$a=(a_1,\cdots,a_s)$，$b=(b_1,\cdots,b_s)\in \mathrm{B}_s$，定义$a\vee b=(a_1\vee b_1,\ \cdots,\ a_s\vee b_s)$，$a\wedge b=(a_1\wedge b_1,\ \cdots,\ a_s\wedge b_s)$，和$\bar{a}=(\bar{a}_1,\ \cdots,\ \bar{a}_s)$．这样的$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2$，…有如下的图表示：



定理2.6 任何一个布尔代数$\mathscr{B}=(\mathrm{B};\vee,\ \wedge,\ \bar{\ })$，$|\mathrm{B}|=2^s$，都与$\mathscr{B}_s$同构．

由此可见，研究$\mathscr{B}_1$是有一般性的．

§3 布尔函数与布尔方程

由于，我们只研究$\mathscr{B}=\mathscr{B}_1$的情况．这时，运算$\wedge$与一般的乘法一致．故，不再用$\wedge$而以一般乘法代之．

具有n个变量的布尔函数$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$就是一个映象f：$\mathrm{B}_1^n\to \mathrm{B}_1$．因为$\mathrm{B}_1^n$中共有$2^n$个点，或者说向量，其中每个分量仅能取值0或1．又，对任一$x\in \mathrm{B}_1^n$，$f(x)$亦仅取值0或1二种方式．故，只可能有2^{2^n}个可能的布尔函数．记$\mathrm{N}=\{1,2,\cdots,\ n\}$．对任何$\mathrm{S}\subseteq\mathrm{N}$，形如$C=\prod_{j\in \mathrm{S}}x_j^{a_j}$的布尔函数称为基本交．其中$x_j^{a_j}=x_j$，当$a_j=1$；$\bar{x}_j$，当$a_j=0$，$a_j\in \mathrm{B}_1$．

定理3.1 任何布尔函数f：$\mathrm{B}_1^n\to \mathrm{B}_1$均有形式：

$$f=\bigvee_{i=1}^{m}C_i=\bigvee_{i=1}^{m}\prod_{j\in \mathrm{S}_i}x_j^{a_j}. \tag{3.1}$$

称f的如（3.1）之形式为基本交的并．对偶地，f也可表示为基本并的交．

如果基本交C_1中的变量全是基本交C_2中的变量，则称C_1包含在C_2中．或，C_2包含C_1．一个基本交C，如果$C=1\Rightarrow f=1$，则称C为f的隐子．f的一个隐子，如果它不包含f的任何其他隐子，则称之为素隐子．可见，由定理 3.1，任何布尔函数均可表示为它的所有素隐子之并．通常记素隐子为P．下面，介绍一种求一个布尔函数的所有素隐子的方法．

二个基本交C_1, C_2，具有形式$C_1=xA_1, C_2=\bar{x}A_2$，A_1中没有一个变量在A_2中以它补的形式出现，则称$C_3=A_1A_2$为C_1和C_2的协调．

定理3.2 任何一个布尔函数f由形式（3.1）可经过反复利用如下二种运算得到它的所有素隐子：

运算Ⅰ：若存在C，$C'\in\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}=\mathscr{C}(f)$，且$C\subseteq C'$，则在$\mathscr{C}(f)$中将$C'$去掉；

运算Ⅱ：若C是$\mathscr{C}(f)$中二个基本交的协调而且不包含$\mathscr{C}(f)$中任何一个基本交，则将C加入$\mathscr{C}(f)$．

一个布尔函数$f=\vee_{i=1}^{m}C_i$，如果存在C_j使得$C_j\leqslant\vee_{i=1,i\neq j}^{m}C_i$，则称$C_j$是多余的．这时，$f$的上述表示称为是有余的．否则，无余的．可惜的是从所有素隐子中求出f的无余表示，一般而论，不是唯一的．对于一个布尔函数f，如果满足：$\forall x, y\in \mathrm{B}_1^n$，$x\geqslant y\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$，则称$f$是正的．然，对于正布尔函数确有如下的结论．

定理3.3 任何正布尔函数的无余表示全是唯一的．且在每个素隐子中变量的指数皆非0．

关于布尔方程，只有如下二类：

$$f(x)=0\ ;\ f(x)=1. \tag{3.2}$$

在f具（3.1）的形式下，第二类方程的求解是不足道的．因为，只需讨论$C_j=\prod_{i\in \mathrm{S}_j}x_i^{\beta_i}=1$，$j=1,2,\cdots, m$．它们的解即可列出．第二类方程的一个解也称为$f$的一个真点．如果$x\in\mathrm{B}_1^n$，是$f$的真点，则由上述讨论可知：当$f$是正的时，任何$y\in\mathrm{B}_1^n$，$y\geqslant x$，$y$亦是$f$的真点．因此，确定第二类方程的解只需求出$f$的所有极小真点即足．所谓$f$的真点$x$是极小的，是指：若有真点$y\leqslant x$则必有$y=x$．对偶地，可知：确定第一类方程的解，只需求出$f$的所有极大伪点．由定理 3.3，还可导出如下结论．

定理3.4 若f是正布尔函数，则它的素隐子与它的极小真点有一个一对一的映象：

$$P_j=\prod_{i\in\mathrm{S}_j}x_i\leftrightarrow\bigvee_{i\in\mathrm{S}_j}e_i. \tag{3.3}$$

其中e_i是所有分量，除第i位置为1外，皆0．

第一类方程的求解不能象第二类那样直接．然而，我们可以利用如下关系消去变量化为解只有一个变量的布尔方程．

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0&\Leftrightarrow f_1(1, x_2, \cdots, x_n)x_1\vee f_1(0, x_2, \cdots, x_n)\bar{x}_1=0\\&\Leftrightarrow f_2(x_2, \cdots, x_n)=f_1(1, x_2, \cdots, x_n)f_1(0, x_2, \cdots, x_n)=0.\end{aligned}$$

其中，最后一个等价性是由于对于单变量方程有：

$$ax_1\vee b\bar{x}_1=0\Leftrightarrow ab=0.$$

另外，也可取补．然后，将之化为（3.1）之形式．或求其素隐子表示．对任一布尔函数$f(x)$还可建立其对偶函数$f^d(x)=\overline{f(\bar{x})}$．容易看出，$f$是正的，当且仅当$f^d$是正的和$x$是$f$的极大伪点，当且仅当$\bar{x}$是$f^d$的极小真点．

对于任何布尔方程，或布尔不等式组，均可用如下的变换将之变成一个布尔方程：

（i）$f(x)\leqslant g(x)$，当且仅当$f(x)\bar{g}(x)=0$；

(ii) $f(x)<g(x)$，当且仅当$f(x)=0$和$\bar{g}(x)=0$；

(iii) $f_1(x)=0$，$f_2(x)=0$，当且仅当$f_1(x)\vee f(x)=0$.

因此，讨论一个布尔方程具有一般性.

§4 一般 0—1 规划

一般0—1规划具有如下形式：

$$(\mathrm{P})\qquad \max g(y):\ f_i(y)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m,\ y\in \mathrm{B}_1^n. \tag{4.1}$$

其中g，$f_i, i=1,2,\cdots, m$全是拟布尔函数，即$\mathrm{B}^n\to\mathrm{R}$的映象，R为实数域．我们这里只讨论$g$是严格单增的情况，即，$x\leqslant y$且$x\neq y\Rightarrow g(x)<g(y)$．当然，这一限制是非常有用的．这一问题，既使$g, f_i$，$i=1,\cdots, m$皆是线性的也是困难的问题．这里给出一种解法，虽然不是有效的．但，并不是遍数的．称这个问题为（P）.

现在，我们记$\mathscr{P}(\mathrm{P})=\{y\in\mathrm{B}_1^n\mid f_i(y)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots, m\}$称为（P）的可行集．其中的点称为可行点．对任一子集$\mathrm{S}\subseteq\mathrm{B}_1^n$,定义一个布尔函数：$\chi_\mathrm{S}$ $\chi_S(x)=1$，当$x\in\mathrm{S}$；0，否则，称χ_S为S的特征．另一个布尔函数ρ_S：$\rho_\mathrm{S}(x)=0$，当$x\in\mathrm{S}$；1，否则．称ρ_S为S的解表征．即，$\rho_\mathrm{S}=\bar{\chi}_\mathrm{S}$．这时,若记$\rho$为（P）的可行集的解表征,则（P）还可表述如下：

$$\max g(y):\ \rho(y)=0,\ y\in\mathrm{B}_1^n. \tag{4.2}$$

这样一来，由于g的严格单增性，它的最大值必在ρ的极大伪点上达到，我们可以用§3中的方法求出ρ的所有极大伪点，然后计算g在这些点处的值取使达最大者得到（P）的最优解．进而，还有如下的结果.

定理4.1 上述的问题（P）的最优解集与如下的问题$(\widetilde{\mathrm{P}})$的最优解集相同.

$$(\widetilde{\mathrm{P}})\qquad \max g(y):\ \widetilde{\rho}(y)=0,\ y\in\mathrm{B}_1^n \tag{4.3}$$

其中$\widetilde{\rho}$是集合$\mathscr{S}(\widetilde{\mathrm{P}})=\{y\in\mathrm{B}_1^n\mid\exists y'\in\mathscr{S}(\mathrm{P}),\ y\leqslant y'\}$的解表征.

然，注意，$\widetilde{\rho}$这时是正的．由上节的讨论，这就为求极大伪点带来了方便．仅管如此，这仍然是一项困难的工作．不过，当g是线性的，已经证明（P）可以化为如下形式的线性0—1规划并且使得它的系数阵中的元素只取0，1（见§12)：

$$(\mathrm{L})\qquad \max c^{\mathrm{T}}x:\ Ax\leqslant b,\ x\in\mathrm{B}_1^n. \tag{4.4}$$

其中$c\in\mathrm{R}^n$，$b\in\mathrm{R}^m$，A为$m\times n$的0—1阵.

定理4.2 记$\mathrm{X}=\{x\in\mathrm{B}_1^n\mid Ax\leqslant b\}$，即（L）的可行集．则（L）的解表征有如下形式：

$$\rho_{\mathrm{X}}(x)=\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{C\in\mathscr{M}_i}\prod_{j\in C}x_j^{\beta_{ij}}, \tag{4.5}$$

其中$\mathscr{M}_i$为不等式$\sum\limits_{1<j<n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots, m$，的所有极小复盖C的集合．即，C$\subseteq\mathrm{N}=\{1,2,\cdots, n\}$且满足性质

$$\mathrm{Per:}\qquad \sum_{j\in\mathrm{C}}|a_{ij}|>b_i-\sum_{j=1}^{m}\min(0,a_{ij}) \tag{4.6}$$

但任何c′$\subset$C均不满足Per．和，取

$$\beta_{ij}=1，当 a_{ij}\geqslant 0；0，否则. \tag{4.7}$$

又，我们知道，一般 0—1 规划问题（L）可以化为 0—1 背包问题：

$$(\mathrm{K}) \qquad \max\ c^{\mathrm{T}}x：a_1x_1+\cdots+a_nx_n\leqslant b，x\in \mathrm{B}_1^n \tag{4.8}$$

其中，$a_1, a_2, \cdots, a_n\in \mathrm{R}_+, b\in \mathrm{R}$. 而且，还可约定 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$.

这时，作为定理4.2的直接推论，可得背包问题（K）的解表征具有如下形式

$$\rho_{\mathrm{X}}(x)=\bigvee_{\mathrm{A}\in\mathscr{M}}\prod_{j\in \mathrm{A}}x_j, \tag{4.9}$$

其中 $\mathscr{M}=\{\mathrm{A}\subseteq \mathrm{N}\,|\sum_{j\in \mathrm{A}}a_j>b$ 但 $\forall\, \mathrm{A}_1\subset \mathrm{A},\ \sum_{j\in \mathrm{A}}a_j\leqslant b\}$.

§5　带序限制的0—1规划

首先，引进变量中之序的概念. 一个是对于 $x_i, x_j\in \mathrm{B}_1$，$x=(x_1, \cdots, x_n)\in \mathrm{X}$，X为（P）问题的可行集，$1\leqslant l, j\leqslant n$，

$$x_i\leqslant x_j：\ x_i=1\Rightarrow x_j=1. \tag{5.1}$$

容易验证，这个关系具有反身性和传递性. 称这个关系为常序关系. $\leqslant$ 被称为常序. 另一个序关系，记为 $\cdot\!\prec$ 称为准序. 即

$$x_i\cdot\!\prec x_j：\ \forall\, y\in \mathrm{X}\subseteq \mathrm{B}_1^n, y_i=0, y_j=1\Rightarrow y'=y+e_i-e_j\in \mathrm{X}. \tag{5.2}$$

当然，也易验证，准序 $\cdot\!\prec$ 也具有反身性和传递性.

下面，就可以描述我们所关心的带序限制的 0—1 规划问题：

$$(\mathrm{O}) \qquad \max\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i：\ x_i\leqslant x_j,\ (i, j)\in \mathrm{S},\ x\in \mathrm{B}_1^n. \tag{5.3}$$

其中　　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\mathrm{S}\subseteq \mathrm{N}\times \mathrm{N}$，$\mathrm{N}=\{1, 2, \cdots, n\}$.

对问题（O），我们可以建立一个有向图 $\mathrm{D}=(\mathrm{N}, \mathrm{S})$. 一个子集 $\mathrm{U}\subseteq \mathrm{N}$，如果 $\forall\,(i, j)\in \mathrm{S}$，$i\in \mathrm{U}\Rightarrow j\in \mathrm{U}$，则称U为一个闭包. 若将有向图D的节点 $i\in \mathrm{N}$ 分配以权 w_i 并对任何 $\mathrm{Y}\subseteq \mathrm{N}$，记 $\mathrm{W}(\mathrm{Y})=\sum_{i\in \mathrm{Y}}w_i$，称为Y的权. 则有下面的定理.

定理5.1　问题（O）与如下求最大闭包问题等价：

$$(\mathrm{C}) \qquad \max\ \mathrm{W}(\mathrm{Y})：\ \mathrm{Y}\in \mathscr{U}(\mathrm{D}). \tag{5.4}$$

其中 $\mathscr{U}(\mathrm{D})$ 是有向图D上所有闭包的集合.

下面，我们讨论问题(O)可以化为求最小截的问题. 所谓D上的源，是指这样的节点 $s\in \mathrm{N}$，使得不存在 $k\in \mathrm{N}$，$(k, s)\in \mathrm{S}$. 记 N_0 为D的所有源的集合. 相反地，汇，即这样的 k，使得不存在 $j\in \mathrm{N}$，$(k, j)\in \mathrm{S}$. 记 N_1 为D的所有汇的集合. 因为若有 $s\in \mathrm{N}_0$，$w_s\leqslant 0$ 则在(O)的最优解 x^* 中，总有 $x_s^*=0$. 和若有 $j\in \mathrm{N}_1$，$w_j\geqslant 0$，则在(O)的最优解 x^* 中，总有 $x_j^*=1$. 故，我们可以在如下的假设H之下讨论我们的问题而不失一般性：

$$\mathrm{H}：\qquad \forall\, i\in \mathrm{N}_0,\ w_i>0；\ \forall\, j\in \mathrm{N}_1,\ w_j<0. \tag{5.5}$$

在假定H之下，我们可以将D扩充为有向图 $\tilde{\mathrm{D}}=(\tilde{\mathrm{N}}, \tilde{\mathrm{S}})=(s\cup \mathrm{N}\cup t, (s, \mathrm{N}^+)\cup \mathrm{S}\cup(\mathrm{N}^-, t))$，其中 s, t 为虚设的二个节点分别作为 $\tilde{\mathrm{D}}$ 的源和汇. $\mathrm{N}^+=\{i|i\in \mathrm{N}, w_i>0\}$，$\mathrm{N}^-=\{i|i\in \mathrm{N}, w_i<0\}$. $(s, \mathrm{N}^+)=\{(s,i)|i\in \mathrm{N}^+\}$，$(\mathrm{N}^-, t)=\{(j,t)|j\in \mathrm{N}^-\}$. 由假设H，$\tilde{\mathrm{D}}$ 只有一个源，即 s. 和只有一个汇，即 t. 进而，在 $\tilde{\mathrm{D}}$ 上给边 $\tilde{s}\in \tilde{\mathrm{S}}$ 赋以权，称为容量，如

$$c(\widetilde{s})=\begin{cases} w_i, & 当\ \widetilde{s}=(s,i)\in(s,N^+); \\ -w_j, & 当\ \widetilde{s}=(j,t)\in(N^-,t); \\ +\infty, & 否则. \end{cases} \tag{5.6}$$

同样地，对任何$E\subseteq\widetilde{S}$，记$C(E)=\sum_{e\in E}c(e)$称为E的容量.

所谓$\widetilde{D}$上的一个截，指具有如下形式的边的集合Z：$\exists J\subseteq\widetilde{N}$，$\overline{J}=\widetilde{N}-J$，

$$Z=(J,\overline{J})=\{(j,l)\in\widetilde{S}\,|\,j\in J,\ l\in\overline{J}\}. \tag{5.7}$$

记$Z(\widetilde{D})$为$\widetilde{D}$上所有截Z使得$s\in J$，$t\in\overline{J}$的集合.

引理5.1 在$\widetilde{D}$上的容量有限的截Z，与D上的闭包X之间存在一个一对一的关系且使得

$$C(Z)+W(X)=W(N^+)=常数. \tag{5.8}$$

证明 首先，可以看出：对任何$\widetilde{D}$上的具有有限容量的截$Z=(J,\overline{J})$，

$$\tau(Z)=J-s=X\in\mathscr{U}(D) \tag{5.9}$$

就给出了所需要的一对一的关系. 近而，由于

$$C(Z)=\sum_{i\in(N-X)\cap N}w_i-\sum_{j\in X\cap N^-}w_j\ ;$$

$$W(X)=\sum_{i\in X\cap N^+}w_i+\sum_{j\in X\cap N^-}w_j\ .$$

即可得(5.8). ■

定理5.2 问题(C)与下面的问题(U)等价：

(U) $$\min C(Z):\ Z\in Z(\widetilde{D}). \tag{5.10}$$

基于上述的定理5.2和定理5.1可知，带限制0—1规划问题(O)相当于在同规模的网路上求最大流的问题. 后者已有了$O(n^3)$的算法. 因此，(O)是P-问题.

注意1 任何0—1规划问题，从原则上说，均可通过加割平面的办法转化为某种带序限制的0—1规划问题.

注意2 从理论上，如何实现注意1中所说的转化是个NP-问题.

§6 深探序与广探序

这里研究更殊殊的带序限制的0—1规划问题. 即，当D是有根树的情况，记之为T. 这时，可以得到线性时间的算法. 为方便，记此问题为P(T, w).

引理6.1 若k是T的一个悬挂点，且$w_k\geqslant0$，则P(T, w)有一个最优解x^*使得$x_k^*=1$.

证明 不足道. ■

由于T是有根树，则可按节点与根之间的距离而确定这个节点的代数. 如果一个节点，它的所有子代(即，下一代)的节点全是悬挂点，则称之为端歧，(Pedicle).

引理6.2 令h是T的一个端歧，又，L为h的所有子代节点的集合. 如果对所有$j\in L$皆$w_j<0$，则P(T, w)的所有最优解x^*皆满足：对任何$j\in L$，有$x_h^*=x_j^*$.

证明 首先注意到，对于P(T, w)的任一最优解x^*，若$x_h^*=1$，则由序限制必对任何$j\in L$，$x_j^*=1$. 这时，引理成立.

若$x_h^*=0$，而存在一个$j\in L$，$x_j^*=1$，则$y^*=x^*-e_j$是P(T, w)的一个可行解. 然，这时，

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^* + w_j < \sum_{i=1}^{n} w_i y_i^* .$$

与x^*的最优性(使目标函数最大)矛盾．■

由于对于任何一个至少有一条边的有根树T，其节点i上有权w_i．只可能：(i) 或者存在一个悬挂点i，$w_i \geqslant 0$；(ii) 或者存在一个端歧h使得其任何一个子代节点j均有$w_j < 0$．从而，总能进行如下二个约化运算之一：

约化1 设k是T的一个悬挂点，取

$$T' = T - k, \quad w' = w_{T'}, \tag{6.1}$$

其中$w_{T'}$，是T上的权函数w限制在T′上．

约化2 对T的一个端歧h，记L_i为i的所有子代节点的集合．取

$$T' = T - L_h, \quad w' = w_{T'} + \delta_{hi} \sum_{j \in L_i} w_j \tag{6.2}$$

其中δ是Kronecker符号．

由此，即可根据引理6.1对T上的悬挂点k，$w_k \geqslant 0$用约化1，和根据引理6.2对端歧h，$w_j < 0$，$j \in L_h$，用约化2，将问题化为少一个节点的问题．如此继续，直到将T变为只有一个节点．

为了由此建立一个线性时间算法，关键在于将T的节点集N赋一个线性序．有二种方式可作到这一点．即，深探序σ和广探序λ．下面，用$g(i)$表示有根树T上节点i的代数．

λ： (i) $g(i) < g(j) \Rightarrow i \lambda j$；

(ii) $g(i) = g(j)$ 且$i \lambda k \lambda j \Rightarrow g(k) = g(i) = g(j)$．

σ： (i) $g(i) < g(j) \Rightarrow i \sigma j$；

(ii) $g(i) = g(j)$ 且$i \sigma j \Rightarrow \forall k$，$(i, k) \in S$，$i \sigma k \sigma j$．

其中S为序限制的集合．即T的边的集合．

深(广)一算法 将T=(N, S)中之节点按线性序$\sigma(\lambda)$给出．即$1\sigma 2\sigma \cdots \sigma n$．节点1为T的根．

第一步：For k: =1 Step 1 To n Do; Begin $s(k)$: $= w_k$, x_k: =0 End

第二步：For i: $= n$ Step −1 To 1 Do; Begin (令$L_i = \{ j \mid (i,j) \in S, s(j) = w_j < 0 \}$)

If $L_i \neq \phi$ Then $s(i)$: $= s(i) + \sum_{j \in L_i} s(j)$

If $s(i) \geqslant 0$ Then x_i: =1 End

第三步：For k: =1 Step 1 To n Do

Begin If $x_i = 1$ Then Let x_j: =1 For $j \in L_i$ End

算法结束时x即给出了P(T, w)的最优解．

§7 常序的产生和利用

这一节在于讨论并回答如下二个问题：

1．如何检查出0—1规划中一对变量x_i，x_j，它们对于所有可行解$y \in X$，都有$y_i < y_j$?

2．如何检查0—1规划中一对变量x_i，x_j，它们对于所有最优解$y^* \in X$，都有$y_i^* < y_j^*$?

首先，虽然我们注意到对于任何一个0—1规划问题，从理论上说，总存在一种加$x_i < x_j$作为割平面使得等价于某个带序限制的0—1规划．不过，如何发现这种割平面确是非常

之难的。从算法复杂性上讲就是不能判定是否可多项式阶实现．但，根据问题的特点加上一些易见又使得最优解保持不变的变量间的序限制作为割平面，却可使问题变得比较简单．甚至，使问题由NP的变为P的．

一般地，如果已知0—1规划中变量x_i和x_j有关系$x_i \leq x_j$，则常可用它消去变量．例如，这时就有

$$x_i + x_j \leq 1 \Rightarrow x_i = 0\text{；}$$
$$x_i + x_j \geq 1 \Rightarrow x_j = 1\text{；}$$
$$x_i \geq x_j \quad \Rightarrow x_i = x_j\text{．}$$

等等．均可使变量减少．

另外，序限制的出现还可减少问题的约束条件，或目标函数的方次．这一点将在§8中介绍．

下面，先回答上面提出的第一个问题．

基于§4中所讨论的，研究问题（L）也是具有一般性的．由（4.5），其解表征是一个布尔函数．因此，就可用定理3.2所给出的协调方法求出它的所有素隐子．不巧地，一般而论，求一个布尔函数的所有素隐子不能以多项式阶的运算完成．然而，若只确定长度不超过k的所有素隐子．这一方法的计算复杂性为$O(n(m+n^k)^2)$却是多项式的．例如，如果由此得到素隐子$x_i\overline{x_j}$，则由于$0 \leq x_i\overline{x_j} \leq \rho_X(x) = 0$必有$x_i \leq x_j$．实际上，在确定一个线性不等式所伴随的变量序限制时如下的三个规则是很有用的．设所研究的线性不等式为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b\text{．}$$

记 $b^* = b - \sum\limits_{1\leq j\leq n} \min(0, a_j)$．则，自然，当 $b^* \geq \sum\limits_{1\leq j\leq n} |a_j|$ 时，此不等式是多余的．

R1． $b^* < 0 \Rightarrow 1 \leq 0$，无解；

R2． $\exists j$，$|a_j| > b^* \Rightarrow x_j = 0$；

R3． $\exists j_1, j_2$，$|a_{j_1}| + |a_{j_2}| > b^* \Rightarrow x_{j_1} \leq \overline{x}_{j_2}$．

关于第二个问题的回答，我们仅以无约束的二次0—1规划为例．

$$\text{(Q)} \qquad \max x^TQx\text{：} x \in B_1^n\text{．} \tag{7.1}$$

其中 $Q = (q_{ij})$ 是一个$n \times n$的对称阵．为此，我们研究对于x_i，x_j，$i<j$，的二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= f(x_1, \cdots, x_{i-1}1, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \cdots, x_n) \\ &\quad - f(x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}\cdots, x_n) \\ &= q_{ij} - q_{jj} + 2\sum_{k\neq i, j}(q_{ik} - q_{jk})x_k\text{．}\end{aligned}$$

可以看出，对任何$x \in B_1^n$，总有

$$\underline{\Delta}_{ij} \leq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \leq \overline{\Delta}_{ij}\text{，}$$

其中，

$$\underline{\Delta}_{ij} = q_{ii} - q_{jj} + 2\sum_{k\neq i, j}\min(0, q_{ik} - q_{jk})\text{；}$$

$$\overline{\Delta}_{ij} = q_{ii} - q_{jj} + 2\sum_{k\neq i, j}\max(0, q_{ik} - q_{jk})\text{．}$$

由此，有如下结果．

定理7.1 对于问题(Q)，总有

$$\overline{\Delta_{ij}}<0 \Rightarrow x_i^* \leqslant x_j^*;\quad \underline{\Delta_{ij}}>0 \Rightarrow x_i^* \geqslant x_j^*.$$

其中 $x^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in B_1^n$ 为(Q)的最优解.

§8 拟布尔函数的线性化

对于任何二个变量ξ，$\eta\in B_1$，我们知道

$$\xi\leqslant\eta\Leftrightarrow\xi\eta=\xi. \tag{8.1}$$

因此，就使我们提出这样的一个问题：对于任何一个非线性拟布尔函数，加上多少个常序的限制条件才能变为一个线性的拟布尔函数．仍以二次函数$f(x)=x^{T}Qx$为例．在这种情况下，若$f(x)$有m项，则在变量之间加上m个常序限制总是可以办到的．

另一方面，由序关系的传递性，具有n个变量的二次拟布尔函数$f(x)$，用$n-1$个常序限制就可将它变为一个线性函数．这是因为总可将此n个变量安排一个线性序．综上所述，即可得下面的引理．

引理8.1 记$\psi(f)$为使f变为线性拟布尔函数所需加的常序限制的最小数．若f为具有n个变量m项的二次拟布尔函数，则

$$\psi(f)\leqslant\min(m,\ m-1). \tag{8.2}$$

令人满意地，对拟布尔函数f，下面我们将会看到不一定是二次的，均可以有效地确定$\psi(f)$．即，可以建立一个多项式阶的算法．

为简便，我们还是仅考虑f是二次的情况．

首先，对f引进一个无向图$G_f=(N,E)$，其中$E=\{\{i,j\}\mid q_{ij}\neq 0\}$．并讨论图$G_f$的性质．令F是$G_f$的一个支撑森．如果存在对F上的边的定向使得在$G_f$中任何一边$e=\{i,j\}\in E-E(F)$都存在F上的一条有向路从$i$到$j$，或从$j$到$i$．称$G_f$的这样的有向支撑森$\vec{F}$为它的一个棕．容易证明，当$G_f$是连通的，任何一个深探树都是它的棕．但，棕未必是深探树.如图8.1粗实线所示的棕不是深探树．

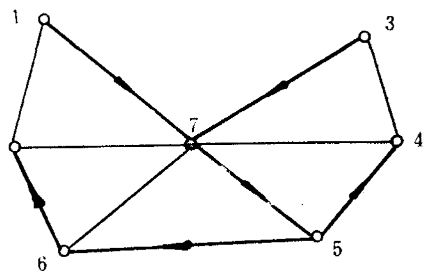


图8.1

引理8.2 任何一个图都有棕．

实际上，在图的每个连通片上求一个深探树．所有这些树构成的此图的有向支撑森即为它的一个棕．

对任一图$G=(V,E)$，记$c(G)$为它的连通片的数目．和，记$r(G)=V-c(G)$．

引理8.3 任一图G的所有棕都有相同的数目的边．且，这个数目就是$r(G)$．

因为棕是森，和图的所有支撑森的边数是常数，即$r(G)$．故上述引理成立．

定理8.1 对于任何二次拟布尔函数f，由它所确定的图G_f，总有

$$\psi(f)=r(G_f).\tag{8.3}$$

且，G_f 的任一棕，它的所有边所确定的变量间之序限制皆使 f 变为线性函数.

证明 由上述引理和 G_f 的定义即得. ■

对于一般的拟布尔函数

$$f(x)=\sum_{j\in\mathscr{C}} a_j \prod_{j\in J} x_j \tag{8.4}$$

也可以与二次情况同样的处理. 首先，构造一个图 $G_f=(N,E)$，这时，$E=\{\{i,j\}\mid\exists J\in\mathscr{C},\ i,j\in J\}$. 结果，可得与定理8.1同样的表征定理.

因此，确定任一拟布尔函数 f 的 $\psi(f)$ 问题，实际上，相当于在具有 n 个节点的图上求深探树. 其算法复杂性为 $O(n+m)$，m 为 f 中的项数. $m\leqslant\binom{n}{2}$.