1988年8月

数学研究与评论
第八卷 第三期

关于$F_{A,\delta}$—环与广义周期环的几个定理*

于宪君

（武汉大学）

本文首先引入$F_{A,\delta}$—环的概念，给出了某些$F_{A,\delta}$—环的结构定理.最后引入广义周期环的概念，给出了某些广义周期环的结构定理.

本文中的环Ω均是结合环．$B(\Omega)$，$L(\Omega)$，$K(\Omega)$，$J(\Omega)$分别是Ω的Bear根，Levitzki根，Köthe根，Jacobson根．除特别申明外，均有$\Omega \neq 0$，$K(\Omega)$．由整序定理（参见文献[1],29)，对本文中任一集合$\mathscr{A}$，不妨设有整序集$I(\mathscr{A})$使$\mathscr{A}=\{a_i\}_{i\in I(\mathscr{A})}$，还简记$I_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$\forall n\in Z^+$．

一、$F_{A,\delta}$—环

定义1 设$0\notin A\subseteq\Omega$，任取$x\in\Omega$，若$x\Omega\neq 0$就有$\Omega\cap A$为非空有限集，则称Ω为F_A—环.

显然，当A是有限集时，F_A—环即是文献[2]定义的F—环．很容易构造F_A—环而非F—环的例子，故知F_A—环是比F—环更广泛的环.

定义2 若$\Omega/\delta(\Omega)$是F_A—环，则称Ω是$F_{A,\delta}$—环，这里$\delta=B$或L或K.

定义3 设Ω有左单位元，若$\Omega/J(\Omega)$为体，则称Ω是左局部环.

本文称Ω满足条件V，如果$\forall e_1=e_1^2, e_2=e_2^2\in\Omega$有$e_2e_1=e_1e_2e_1$．设$N\subseteq\delta(\Omega)$是Ω的右理想，$\Omega_i$是左局部环且为Ω的理想，$e_i$是其左单位元，$\forall i\in I_n$．若$\Omega=N+\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i$且$\overline{\Omega}=\Omega/\delta(\Omega)=\sum_{i\in I_n}\oplus\overline{\Omega}_i$，诸$\overline{\Omega}_i$为体及$e_iN=Ne_i=0$，$\forall i\in I_n$，则记$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i$．若还有$\Omega=N'\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i'$，就必有：1）$\{\Omega_i\}_{i\in I_n}=\{\Omega_i'\}_{i\in I_m}$；2）$N\cong N'$（注，由1即可推出2），其证明在定理1的证明中给出．为更清楚地了解本文讨论的环的结构，我们将2）作为条件给出．当N为Ω的理想时，还必有$N=N'$，则称$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i$是$\delta\dotplus L$—$I_n$—分解.

定理1 设Ω是$F_{A,\delta}$—环，若Ω满足条件V，则$\overline{\Omega}=\Omega/\delta(\Omega)=\sum_{i\in I_n}\oplus\overline{e_i}\overline{\Omega}$，其中诸$\overline{e_i\Omega}$为体，$\overline{e_i}$是其单位元，当A是有限集时，I亦然(视$I=I_n$)而且$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$是$\delta\dotplus L$—$I_n$—分解.

引理1 设$T\subset\Omega$是有限集，则有$T'\subset T$具有性质F：对$\forall x_1'\neq x_2'\in T'$有$x_1'\notin((x_2'))$且对$\forall y\in T$有$x_y\in T'$使$x_y\in((y))$.（$z$生成的右理想记作$((z))$，$\forall z\in\Omega$）.

*1985年11月11日收到．作者现在在黑龙江商学院工作。

证明 设 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 记 $T_0=T$,

$$T_k=\begin{cases} T_{k-1}, & \text{若 } \forall x\neq x_k\in T_{k-1} \text{ 有 } x\ \widetilde{\in}\ (x_k) \\ T_{k-1}/\{x_k\}, & \text{若某 } x_i\neq x_k\in T_{k-1} \text{ 而 } x_i\in (x_k) \end{cases}\qquad \forall k\in I_n$$

容易证明※: $\forall k_1<k_2\in I_n, x_{k_1}\in T_{k_2}\Leftrightarrow x_{k_1}\in T_n$.

不妨设T_n至少含两个元. 任取$x_i\neq x_j\in T_n$, 显然$x_i\in T_{j-1}$, 故由T_j之定义知$x_i\ \widetilde{\in}((x_j))$, 于是若假设$T'=T_n$不具有性质F, 则有$x_t\in T$使$\forall x\in T_n$有$x\ \widetilde{\in}((x_t))$. 记$m=\max\{k\in I_n\mid \forall x\in T_n$有$x\ \widetilde{\in}((x_k))\}$, 显然$x_m\ \widetilde{\in}\ T_n$, 于是由※知$x_m\ \widetilde{\in}\ T_m$即有$x_{m_1}\neq x_m\in T_{m-1}$而$x_{m_1}\in((x_m))$, 显见有$x\ \widetilde{\in}((x_{m_1}))$, $\forall x\in T_n$, 故知$m_1<m$, 于是由※知$x_{m_1}\in T_n$, 矛盾. 从而本引理得证.

引理2 若Ω满足条件V, 则Ω满足条件W: 对$\forall e=e^2$, $x\in\Omega$有$xe=exe$.

证明 由$e+(xe-exe)$亦为幂等元即知.

引理3 设Ω是δ—半单纯环又是F_A—环, 若Ω满足条件V, 则$\Omega=\sum_{i\in I}\oplus\Omega_i$, 诸$\Omega_i$为体.

证明 显见$\forall a\neq 0\in\Omega$有$a\Omega\neq 0$, 于是由Ω为F_A—环知$a\Omega\cap A=T_a$为非空有限集. 由引理1证有$T'_a=\{x_i^a\}_{i\in I_n}\subseteq T_a$, $n=n(a)\in Z^+$具有性质F. 任取$x_k^a\in T'_a$及$\forall y\in\Omega$, 若$x_k^a y\neq 0$则有$x_a\in A$使$x_k^a\in x_k^a y\Omega$, 易知必有$x_a\in T_a$, 于是由T'_a具有性质F知有$x_m^a\in T'_a$使$x_m^a\in(x_a)\subseteq x_k^a y\Omega$, 故有※²: $x_m^a=x_k^a\in x_k^a y\Omega$.

易见$x_k^a\Omega x_k^a\neq 0$即有$y_k^a\in\Omega$使$x_k^a y_k^a x_k^a\neq 0$, 于是由※²知$x_k^a\in x_k^a y_k^a x_k^a\Omega$, 从而有$z_k^a\in\Omega$使$x_k^a y_k^a=x_k^a y_k^a x_k^a z_k^a$, 记$e_k^a=x_k^a z_k^a$. 若$(e_k^a)^2-e_k^a\neq 0$, 则由$(e_k^a)^2-e_k^a=x_k^a(z_k^a e_k^a-z_k^a)$知$x_k^a\in[(e_k^a)^2-e_k^a]\Omega$, 从而有$x_k^a y_k^a=x_k^a y_k^a x_k^a z_k^a\in x_k^a y_k^a[(e_k^a)^2-e_k^a]\Omega=0$, 矛盾, 故$e_k^a$为幂等元. 任取$x\in\Omega$, 若$e_k^a x-e_k^a x e_k^a\neq 0$, 则由※²即知$x_k^a$更有$e_k^a\in[e_k^a x-e_k^a x e_k^a]\Omega$, 从而有$e_k^a\in[e_k^a x-e_k^a x e_k^a]\Omega e_k^a=[e_k^a x-e_k^a x e_k^a]e_k^a\Omega e_k^a=0$, 矛盾, 故有$e_k^a x=e_k^a x e_k^a$, 故再由引理2知$e_k^a$为$\Omega$的中心元. 若$e_k^a x\neq 0$, 则$x_k^a\in e_k^a x\Omega$, 于是有$y\in\Omega$使$e_k^a=e_k^a xy=e_k^a x e_k^a y$, 显然$e_k^a$是$e_k^a\Omega$的单位元, 故知$e_k^a\Omega$为体. 记$e(\Omega)=\bigcup_{a\in\Omega}(\bigcup_{i\in I_n}e_i^a\Omega)=\{e_i\Omega,\ e_i=e_i^2\in\Omega\}_{i\in I}$, 由诸$e_i\Omega$为体且为$\Omega$的理想知$\sum_{i\in I}e_i\Omega=\sum_{i\in I}\oplus e_i\Omega$. 记$a_n=a-\sum_{i\in I_n}e_i^a a$, 若$a_n\neq 0$, 则由$a_n\Omega\subseteq a\Omega$知有$x'_a\in T_a$使$x'_a\in a_n\Omega$, 由$T'_a$具性质F知有$x_r^a\in((x'_a)\subseteq a_n\Omega$, 即知$e_r^a\in a_n\Omega$, 显然有$e_i^a e_j^a=0$, $\forall e_i^a\neq e_j^a$, 于是有$e_r^a\in e_r^a a_n\Omega=0$, 矛盾, 故$a_n=0$, 从而知$a\in\sum_{i\in I_n}e_i^a\Omega\subseteq\sum_{i\in I}\oplus e_i\Omega$, 于是令$\Omega_i=e_i\Omega$, $\forall i\in I$, 就有$\Omega=\sum_{i\in I}\oplus\Omega_i$, 且诸$\Omega_i$为体.

推论 不含非零幂零元的F—环是有限多个体的直和. 这即是文献[2]的结果.

定理1的证明 由引理2知Ω满足条件W, 现断言$\overline{\Omega}=\Omega/\delta(\Omega)$亦然. 设$e\in\Omega$, $e^2-e\in\delta(\Omega)$, 于是有$k\in Z^+$使$(e^2-e)^k=0$, 从而知有$f(t)\in M[t]=\{\sum_{i\in I_n}a_i t^i\in Z[t], \forall n\in Z^+\}$使$e^k=e^k f(e)$更有$e^k=e^k[f(e)]^{k+1}$, 显见有$g(t)\in M[t]$使$t^k g(t)=[f(t)]^{k+1}$, 于是有$e^k=e^k e^k g(e)$. 由此即知$e^k g(e)$为幂等元且$\overline{e}=\overline{e}^k g(\overline{e})$, 故上断言成立. 故由引理3知$\overline{\Omega}=\sum_{i\in I}\oplus\overline{e_i\Omega}$, 其中诸$\overline{e_i\Omega}$为体, $\overline{e_i}$为其单位元. 由上面的证明, 不妨设诸e_i还是幂等元.

下设A为有限集．由引理3的证明可见I亦然，设 $I=I_n$．任取$i,j\in I_n$，由$\overline{\Omega}=\sum_{i\in I_n}\oplus\overline{e_i\Omega}$知，当$i\neq j$时有$e_ie_j\in\delta(\Omega)$，于是由$(e_ie_j)^2=e_je_ie_j=e_ie_j$知此时$e_ie_j=0$，由引理2便知$e_i\Omega$是$\Omega$的理想，于是有$\sum_{i\in I_n}e_i\Omega=\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$．易知$J(\overline{\Omega})=\overline{O}$，从而知$J(\Omega)=\delta(\Omega)$，于是有$J(e_i\Omega)=e_i\Omega\cap J(\Omega)=e_i\Omega\cap\delta(\Omega)$，故由，

$$e_i\Omega+\delta(\Omega)/\delta(\Omega)\cong e_i\Omega/e_i\Omega\cap\delta(\Omega)$$

知$e_i\Omega/J(e_i\Omega)\cong\overline{e_i\Omega}$，故$e_i\Omega$为左局部环．记$N=\{x-\sum_{i\in I_n}e_ix\mid x\in\Omega\}$，由引理2知$e_iN=Ne_i=0$，显见$N\subseteq\delta(\Omega)$，故有$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$．

最后证明上述分解是$\delta\dotplus L-I_n$一分解．假设还有$\Omega=N'\dotplus\sum_{i\in I_m}\oplus\Omega_i'$，任取$i\in I_m$，设$e_i'$是$\Omega_i'$的左单位元，则有$x\in N$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\Omega$使$e_i'=x+\sum_{j\in I_n}e_jx_j$，由$e_jx=0$，知$e_je_i'=e_jx_j$为幂等元，$\forall j\in I_n$．容易证明左局部环中元$\beta_1=\beta_1^2\neq0$，$\beta_2=\beta_2^2\neq0$满足$\beta_1\beta_2\neq0$，于是知有$t\in I_n$使$e_i'=x+e_tx_t$，显然有$x+e_tx_t=(x+e_tx_t)^2=x^2+e_tx_tx+(e_tx_t)^2$，从而知$x-x^2\in\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$，故知 $x=0$，故$\Omega_i'\subseteq e_t\Omega$．用同样方法可以证明有$t'\in I_m$使$e_t\Omega\subseteq\Omega_{t'}'$，故易知$\Omega_i'=e_t\Omega$，即知$\{\Omega_i'\}_{i\in I_m}\subseteq\{e_i\Omega\}_{i\in I_n}$，同理可证$\{e_i\Omega\}_{i\in I_n}\subseteq\{\Omega_i'\}_{i\in I_m}$，故有$\{e_i\Omega\}_{i\in I_n}=\{\Omega_i'\}_{i\in I_m}$．由此易知$e'e=e$，$e=\sum_{i\in I_n}e_i$，$e'=\sum_{i\in I_n}e_i'$．不难证明$N'=\{x-e'x\mid x\in\Omega\}$，从而易知映射$\varphi$: $x-ex\to x-e'x$，$\forall x\in\Omega$是N到N′的满同态映射．若$\varphi(y-ey)=0$，$y\in\Omega$，则$y\in\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$，故必有$y-ey=0$，故$\ker\varphi=0$，故知$N\cong N'$．若N为$\Omega$的理想，则由$x'-ex'\in N$，$\forall x'\in N'$知$e'(x'-ex')=-e'ex'=-ex'=0$，故有$x'\in N$即知$N'\subseteq N$，由此便易知$N=N'$，故$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus e_i\Omega$是$\delta\dotplus L-I_n$一分解．

设Ω是广义周期环（见后面的定义4），记$\overline{\Omega}=\Omega/K(\Omega)$，显见$J(\overline{\Omega})=\overline{O}$，于是$x\in\Omega$，$\overline{x}\neq\overline{O}$，则有$y\in\Omega$使$\overline{xy}$非幂零元，故知$(\overline{xy})^{n(xy)}[f_{xy}(\overline{xy})]^{n(xy)}\neq\overline{O}$为幂等元，即知$\overline{x}\overline{\Omega}\cap\{\overline{e}=\overline{e}^2\neq\overline{O}\mid e\in\Omega\}\neq\phi$，于是有

推论1 设Ω是广义周期环，若Ω满足条件V及$\Omega/K(\Omega)$只有有限多个非零幂等元，则$\Omega=N\dotplus\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i$是$K\dotplus L-I_n$一分解．

系 广义周期环Ω若不含非零的诣零理想且恰有一个非零等方元素，则Ω为域．这是文献［3］的结果；不含非零幂零元且恰有一个非零等方元素的周期环为域的改进和推广．

显见右双环满足条件V而D_k（D为体，$k>1$）却不然，故由Wedderburn-Artin定理及定理1有

推论2 设Ω是右双环，若$\Omega/\delta(\Omega)$是Artin环，则$\Omega=N\oplus\sum_{i\in I_n}\oplus\Omega_i$是$\delta\oplus L-I_n$一分解．显然，这是文献［4］更是文献［5］的结果的推广．

二、广义周期环

定义 4 若 $\forall x \in \Omega$ 有 $n = n(x) \in Z^{+}$，$f_x(t) \in M[t]$ 使 $x^n = x^{n+1} f_x(t)$，则称 Ω 为广义周期环. 当 $n \equiv 1$ 时，还称 Ω 为广义 J—环.

定义 5 设 H 为 Ω 的理想，称 $LR(H) = \{ x \mid x \in \Omega,\ xH = Hx = 0 \}$ 是 H 在 Ω 中的零化子，称之为 Ω 的理想零化子. 显见 $LR(H)$ 是 Ω 的理想.

定理 2 设 Ω 是广义周期环，若 Ω 满足条件 V 及 $\Omega / k(\Omega)$ 的理想零化子满足升或降链条件，$\Omega = N \oplus \sum_{i \in I_n} \oplus \Omega_i$ 是 $K \oplus L$—I_n—分解.

由文献 [6] 知广义 J—环是交换环，于是有

引理 4 无零因子的广义 J—环为域.

引理 5 广义 J—环 Ω 的理想零化子若满足升或降链条件，则 Ω 为有限多个域的直和.

证明 假设不然，由引理 4 知 Ω 有非零的零因子，于是由 Ω 是交换环易知 $\mathfrak{M} = \{ LR(H) \neq 0 \mid H \neq 0$ 为 Ω 的理想$\}$ 非空，不难证明环的理想零化子满足升链条件与满足降链条件等价（其证明与文献 [1] 273 页定理 6 的证明类似），故 Ω 的理想零化子满足升、降链条件. 故 $\mathfrak{M}$ 有极大元 $LR(A_1)$，若 A_1 非域，由引理 4 知有 $a, b \neq 0 \in A_1$ 使 $ab = 0$，从而知 $LR((b)) \subseteq LR(A_1) + (a)$，故 $LR((b))$ 真包含 $LR((A_1))$，与 $LR(A_1)$ 的极大性矛盾，故 A_1 为域. 从而知 $\{ LR(B) \mid B = \sum_{i \in I_k} \oplus B_i$，诸 B_i 为 Ω 的理想且为域，$k \in Z^{-} \}$ 有极小元 $LR(B')$. 由 B' 为有限个域的直和易知 $LR(B') \oplus B' = \Omega$，显见 $LR(B')$ 的任一理想 B'_0 亦为 Ω 的理想，任取 $x \in LR\cdot(B'_0)$. 由上知有 $x' \in B'$，$x'' \in LR(B')$ 使 $x = x' + x''$，记 $LR_0(B'_0)$ 是 B'_0 在 $LR(B')$ 中的零化子显见 $x'' \in LR_0(B'_0)$，故知 $LR(B'_0) = B' \oplus LR_0(B'_0)$，从而易知 $LR(B')$ 的理想零化子亦满足升，降链条件，显然 $LR(B') \neq 0$ 非域. 于是仿上面的证明就知有 $LR(B') = A'' \oplus B''$，其中 A''，B'' 均为 Ω 的理想且 A'' 为域，易知 $LR(A'' \oplus B') = B''$，从而得 $A'' \oplus B'' = B''$. 矛盾，从而本引理得证.

定理 2 的证明 设 $\overline{\Omega} = \Omega / k(\Omega)$. 假设 $a \in \Omega$，$\bar{a}^2 = \overline{O}$，任取 $r \in \Omega$，显然有 $(ra)^n = (ra)^{2n}[f_{ra}(ra)]^n$，$n = n(ra)$ 且 $(ra)^n[f_{ra}(ra)]^n$ 为幂等元，故由引理 2 知 $(\overline{ra})^{2n} = (\overline{ra})^{3n} \cdot [f_{ra}(\overline{ra})]^n = (\overline{ra})^{2n-1}\bar{r}(\overline{ra})^n f_{ra}(\overline{ra})]^n \bar{a}(\overline{ra})^n[f_{ra}(\overline{ra})]^n = \overline{O}$，显见 $J(\overline{\Omega}) = \overline{O}$，故必有 $\overline{\Omega a} = \overline{O}$，从而知 $\overline{a} = \overline{O}$，故知 $\overline{\Omega}$ 不含非零幂零元，故由 $(x - x^2 f_x(x))^{n-1} = (x - x^2 f_x(x))[x^n + x^n \sum_{i \in I_n} c_n^i(-x f_x(x))^i] = 0$ 知 $\overline{x} = \bar{x}^2 f_x(\overline{x})$，$\forall x \in \Omega$，故 $\overline{\Omega}$ 为广义 J—环，于是由引理 5，再由定理 1 即知本定理成立.

由定理 2 及定理 1 的推论立即得到

定理 3 设 Ω 是广义周期环，若 Ω 满足条件 V，则下面条件是等价的：

1. $\Omega\ k(\Omega)$ 的理想零化子满足升链条件.，
2. $\Omega\ k(\Omega)$ 的理想零化子满足降链条件，
3. $\Omega / k(\Omega)$ 是 Noether 环，
4. $\Omega / k(\Omega)$ 是 Artin 环，
5. $\Omega / k(\Omega)$ 只有有限多个幂等元，

6．$\Omega/k(\Omega)$ 为0或为有限多个域的直和，

7．Ω 为诣零环或 $\Omega = N \oplus \sum_{i \in I_n} \oplus \Omega_i$ 是 $K \oplus L$ —I_n—分解.

注：1．若Ω 的幂等元相互可换，则Ω 的幂等元均为中心元，于是本文各定理及其推论中之环的幂等元若相互可换，则其分解中的N是该环的理想．2．满足条件V的环，其幂等元未必是中心元，这一点可参见文献［7］中右双环而非双环之例.

衷心感谢熊全淹教授，郭元春博士的热情关怀和指导。

参考文献

［1］谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

［2］姚学，数学研究与评论，Vol.4，No.4，1984，77—78.

［3］谢邦杰，数学研究与评论，Vol.2，No.2，1982，11－13.

［4］邱琦璋，华中工学院学报，6(1983)，47－50.

［5］吴品三，数学杂志，Vol.3，No.2，1983，133－135.

［6］Herstein，I，N.，ibid，75(1953)，864－871.

［7］樊复生，吉林大学自然科学学报，2(1983)，1－12.

Several Theorems Concerning $F_{A,\delta}$-Rings and Generalized Periodic Rings

Yu Xianjun

(Wuhan University)

Abstract

In this paper, we introduced the concept of $F_{A,\delta}$—ring and the concept of generalized periodic ring, the structure theorems for some $F_{A,\delta}$—rings and generalized periodic rings are given.