四元数自共轭矩阵的几个定理*

曹重光

（黑龙江大学，哈尔滨）

设Q表示四元数体，如果$x=a+bi+cj+dk$，我们用$\overline{x}$记$a-bi-cj-dk$，$N(x)$记$a^2+b^2+c^2+d^2$．又令$Q^{m\times n}$记Q上$m\times n$矩阵的集合，如果$P\in Q^{m\times n}$，则P^*表示P的转置共轭矩阵．我们常用$GL_n(Q)$记Q上n阶可逆阵的集合；$SC_n(Q)$记Q上n阶自共轭矩阵的集合．我们还以$A\geqslant 0$表示$A\in SC_n(Q)$且A为半正定的；$A>0$表示$A\in SC_n(Q)$且A为正定的；$A>B$表示$A-B>0$；$A\geqslant B\geqslant 0$表示$B\geqslant 0$且$A\geqslant B$．

文[1]，[2]，[3]，[4]，[5]讨论了$SC_n(Q)$中元素的许多重要性质，其中同时GH合同对角化的定理（即本文引理3）被[6]用来证明一些行列式不等式．本文旨在讨论$SC_n(Q)$中半正定矩阵的同时对角化问题，得到了几个定理，推广了[2]，[3]，[4]，[5]的有关结果．

[3]**引理1** $A\in SC_n(Q)$，则存在广义酉矩阵U使得UAU^*为实对角矩阵．

[4]**引理2** $A\geqslant 0$且秩$A=r$，则$A=RR^*$，其中$R\in Q^{n\times r}$．

[5]**引理3** $A>0$且$B\in SC_n(Q)$，则有$P\in GL_n(Q)$使得$P^*AP=I_n$，且

$$P^*BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

引理4 $A=(a_{ij})\geqslant 0$，且对某个i有$a_{ii}=0$，则$a_{ij}=a_{ji}=0\ \ \forall\ j=1,2,\cdots,r$.

证明 由引理2，设秩$A=r$，则有$A=RR^*$，其中$R=(r_{lp})\in Q^{n\times r}$，从而$a_{ii}=\sum\limits_{k=1}^{r}r_{ik}\overline{r}_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{r}N(r_{ik})=0$，由此推出$r_{ij}=0\ (j=1,2,\cdots,r)$，于是$a_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{r}r_{ik}\overline{r_{kj}}=0$，与此同时$a_{ji}=\overline{a}_{ij}=0$，$(j=1,2,\cdots,r)$．

引理5 若$B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2^*\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}\geqslant 0$，则

(i) 秩$(B_2\ B_3)=$秩B_3 且$B_3X=-B_2$有解；(ii) 秩$(B_1\ B_2^*)=$秩B_1 且$B_1X^*=B_2^*$有解．

证明 因为$B\geqslant 0$，由[5]之命题1知B_1及B_3均半正定．再由引理1知有广义酉矩阵U使得$UB_3U^*=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_t\end{pmatrix}\geqslant 0$， 于是

* 1986年2月13日收到．

$$\begin{pmatrix} I & O \\ O & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ O & U^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & (UB_2)^* \\ UB_2 & B_4 \end{pmatrix} \geqslant 0 .$$

其中$B_4=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t\end{pmatrix}$ 又由引理4知，若$\lambda_i=0$，则$(UB_2\ \ B_4)$的第i行全为0，从而

$$秩(B_2B_3)=秩U(B_2B_3)\begin{pmatrix} I & O \\ O & U^* \end{pmatrix}=秩(UB_2B_4)=秩B_3 .$$

最后由[7]的299页定理9知$B_3X=-B_2$恒有解，于是（i）得证．同样可证明（ii）.

定理1 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，则存在$P\in GL_n(Q)$，使得$P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$P^*BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_i\geqslant 0$.

证明 若$A>0$，由引理3，结论显然．若秩$A=r<n$，则由[4]的定理6知存在可逆矩阵U使得$A_0=U^*AU=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$B_0=U^*BU=\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\geqslant 0$，其中$B_1\in Q^{r\times r}$．现在令$L=\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix}$，其中$X$满足$B_3X=-B_2$（这一矩阵方程的有解由引理5可知），不难验证$L^*AL=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$L^*BL=\begin{pmatrix} M & O \\ O & M \end{pmatrix}$；由[5]之命题1可知$M$及$N$均半正定，再利用引理1有广义酉矩阵$V_1$及$V_2$使得$\begin{pmatrix} V_1^* & O \\ O & V_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 & O \\ O & V_2 \end{pmatrix}$为实对角矩阵，而此时又有$\begin{pmatrix} V_1^* & O \\ O & V_2^* \end{pmatrix}L^*A_0L\begin{pmatrix} V_1 & O \\ O & V_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，于是只须令$P=UL\begin{pmatrix} V_1 & O \\ O & V_2 \end{pmatrix}$，定理即得证.

定理2 $A\geqslant 0$，$B\geqslant 0$，则

（i）存在$P\in GL_n(Q)$使得 P^*AP及$P^{-1}BP^{*-1}$同时为实对角矩阵；

（ii）AB及BA均可中心化矩阵[3]，且相似于同一实对角矩阵.

证明 （i）仿定理1的证明，只需取X满足矩阵方程$B_1X^*=B_2^*$即可.

（ii）由（i）不难看出 $P^*ABP^{*-1}=P^*AP\cdot P^{-1}BP^{*-1}=P^{-1}BP^{*-1}\cdot P^*AP=P^{-1}BAP$，于是（ii）得证.

定理3 $A>0$，$B\in SC_n(Q)$，则AB与BA均可中心化矩阵且均相似于同一实对角矩阵.

证明 由$A>0$知$A^{-1}>0$，于是由引理3知存在$P\in GL_n(Q)$，使得$P^*A^{-1}P=I_n$且P^*BP为实对角阵，从而$P^{-1}AP^{*-1}=I_n$，于是仿定理2之（ii）的证明可证得本定理.

下面我们指出定理1的应用，先给两个定义.

定义1 若$A\in Q^{m\times n}$，称满足$AXA=A$的矩阵X为A的广义（1）逆，记为A^-.

定义2 若$A\in Q^{m\times n}$，称满足$AXA=A$及$XAX=X$的矩阵X为A的广义（1,2）逆，记为A^+.

定理4 $A\geqslant B\geqslant 0$，则存在$B^-\in GL_n(Q)$及$A^-\in GL_n(Q)$使得$B^-\geqslant A^-\geqslant 0$.

证明 由定理1，存在$P\in GL_n(Q)$使得$P^*AP=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，$P^*BP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$；

又由$A\geqslant B$知$\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=\cdots=\lambda_n=0$，$\lambda_t\leqslant 1$ $(t=1,2,\cdots,r)$．设$\lambda_{i_1}=\lambda_{i_2}=\cdots=\lambda_{i_k}=1$，$1\leqslant i_j\leqslant r(1\leqslant j\leqslant k)$，取$B^-=P^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & I\end{pmatrix}P^{*-1}$，$A^-=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ & I \end{pmatrix}P^{*-1}$，其中$\mu_l=\begin{cases} 1 & (l=i_j) \\ \lambda_l^{-1} & (l\neq i_j)\end{cases}$

容易看出 $B^{-} \geqslant A^{-} \geqslant 0$，而$B^{-}$及$A^{-}$为广义（1）逆更不难验证.

注　[2]中定理16为本定理之特例.

定理 5　$A \geqslant B \geqslant 0$，秩$A$=秩$B$，则存在$B^{+}$及$A^{+}$使得 $B^{+} \geqslant A^{+} \geqslant 0$.

证明　仿定理 4 的证明，取$A^{-} = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}P^*$及$B^{-} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} \cdots \lambda_r^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}P^*$，可证本定理成立.

参考文献

[1] 谢邦杰，中国科学. 数学专辑(1979)，pp. 88—93.

[2] 谢邦杰，数学学报，(5)(1980)，pp. 659—671.

[3] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，(3)(1980)，pp. 1—33.

[4] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，(2)(1980)，pp. 19—34.

[5] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，(1)(1982)，pp. 1—7.

[6] 郝稚传，数学研究与评论，(4)(1985)，pp. 15—20.

[7] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

Several Theorems of Self-Conjugate Quaternions Matrices

Cao Chongguang

Abstract

In this paper we disscus semi-positive definite self-conjugate matrices on quaternion. The following theorem is proved:

Suppose A, B are both semi-positive difinite self-conjugate matrices of order n on quaternion. Then

(1) there exists $P \in GL_n(Q)$, such that $P^*AP = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $P^*BP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(2) AB and BA are both the centralizable matrices and they are similar to same a real diagonal matrix.