不定向二维流形上动力系统周期轨道的存在性*

何 连 法
（河北师范大学，石家庄）

设M^2是紧致连通不定向二维流形，f是M^2上的C^1动力系统．

定理1 设f具有有限个简单奇点，且满足H_1：不存在由鞍点和线轨道组成的奇闭轨；H_2：至少存在一个源（渊）点q，使得离开（进入）q的轨道都不走向鞍点，则f存在周期轨道L_q．

证明 由〔1〕的定理1证明可知，对q存在简单闭曲线σ，它是处处横截流的，且对任$x\in\sigma$有$A(x)=\{q\}$（$A(x)$，$\Omega(x)$分别表示过x的轨道的正向和负向极限集）．同时σ在M^2上界成含q的圆盘．对任$x\in\sigma$，显然过x的轨道$f(x,t)$是渐近的．当$\Omega(x)$是奇点时，由奇点有限及条件H_2，$\Omega(x)$只能是渊点．因此存在x的邻域$V(x)$，使得任$y\in V(x)$有$\Omega(y)=\Omega(x)$，$A(y)=A(x)=\{q\}$．首先我们证过σ上的轨道不能全走向渊点，否则，易见它们要全部走向同一个渊点，记此渊点为r．由于σ是同胚于圆周的，过σ上的轨道又是渐近的因而是与实直线同胚的．于是若令$W=\{x\,|f(x,t)\to q,\ t\to-\infty\}$时，那么可知$W\cup\{q\}\cup\{r\}$是与球面$S^2$同胚的，由流形$M^2$连通且不可定向，这是不可能的．

其次证任$x\in\sigma$，$f(x,t)$不走向奇点．否则，设$f(x,t)$走向渊点r，同样对r存在简单闭曲线σ_1，使σ_1处处横截流的，而且过σ_1上的轨道都走向r．可取$\sigma_1\cap\sigma=\phi$．令$\eta(x)$是σ上包含x的邻域使得任$z\in\eta(x)$有$\Omega(z)=\{r\}$，但它的边界点，例如y有$f(y,t)$不走向r．记$\eta(x)$中从x到y的这段半开弧为〔x,y)，令$z'=f(z,R)\cap\sigma_1$，$z\in$〔x,y)．当$z\neq x$时，轨弧$\widehat{xx'}$与$\widehat{zz'}$是不交的．由流的连续性，当z连续地从x向y变化时，z'在σ_1上就单调地变化．z'在σ_1上的旋转方向与z在σ上的旋转方向相同或相反（图1所示是相反的情形）．对任$z\in$〔x,y)，轨弧$\widehat{xx'}$可连续地变到$\widehat{zz'}$；另外，当z从x变向y时，z离开x后不能再无限接近x'，即$\widehat{zz'}$不能再无限靠近$\widehat{xx'}$，如此全部轨弧$\widehat{zz'}$，$z\in$〔x,y)组成一个带子Δ．过y的正半轨及$\Omega(y)$一定属于Δ的边界$\partial\Delta$，因而可知$\Omega(y)$只能是鞍点，这与条件H_2相矛盾．

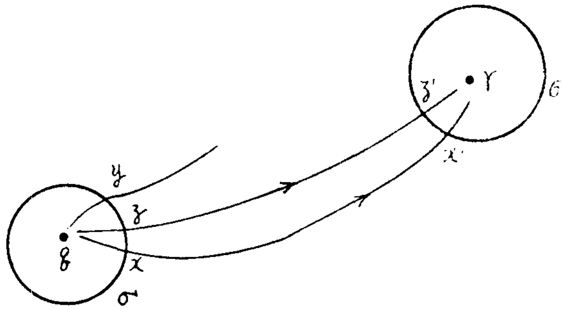

图1

至此我们证明了任$x\in\sigma$有$\Omega(x)$含有常点．设$p\in\Omega(x)$是一常点，于是由〔3〕的定理2

* 1985年2月10日收到．

证明知，p 或者位于闭轨上或者位于奇闭轨上．若是后者，那么显然此奇闭轨只能是由鞍点和线轨线组成，由H_1，这不可能，故 p 在闭轨上．定理得证．

定义 我们把从定理1的证明中所得到的这个周期轨道L_q称为是环绕源（渊）点 q 的周期轨道．

下面的两个结论是对定理1的进一步研究．

系1 在定理1中，若环绕 q 的周期轨道L_q是单侧的，那么M^2 只能是射影平面P^2，且 f 是P^2 上仅有一个源（渊）点 q 的动力系统．

证明 设σ 的意义如定理1证明中所示．用D表示由σ 在M^2 上所界的含 q 的闭圆盘．由于过σ 的轨线全是渐近的，且由定理1的证明知任$x\epsilon\sigma$ 有$\Omega(x)$含有常点，因而由〔4〕的定理2知过σ 上的轨线具有相同的正向极限集．进而可见此正向极限集就是L_q．由于L_q 是单侧的，故存在L_q的ε一邻域$M(\varepsilon)$是一Möbius 带．另外，对任$t\epsilon R^+$，映射$f(\cdot,t)$：$M \to M^2$．是一同胚，因而$f(\sigma,t)$是一双侧闭曲线，$f(D,t)$是包含D的以$f(\sigma,t)$为边界的闭圆盘．由于对任$x\epsilon\sigma$ 有$\Omega(x)=L_q$ 以及σ 的紧致性，故存在充分大的 t 使$f(\sigma,t)$含于$M(\varepsilon)$中．由于$f(\sigma,t)$是$M(\varepsilon)$内的一双侧闭曲线，故从〔5〕中Möbius 带的拓扑性质知，$f(\sigma,t)$在$M(\varepsilon)$中界成一含L_q的Möbius 带$M_1(\varepsilon)$；另外$f(\sigma,t)$是$M_1(\varepsilon)$和$f(D,t)$的公共边界，从而由〔5〕中关于射影平面的拓扑性质知，$M_1(\varepsilon)\cup f(D,t)$是一个射影平面，由$M^2$的连通性得到$M^2=P^2$；此外我们可取充分小的$\varepsilon$ 使$M(\varepsilon)$不含 f 的奇点，因而$M_1(\varepsilon)\cup f(D,t)$ 仅含奇点 q．系1得证．

系2 设 f 满足定理1的H_1，若 f 存在适合H_2 的源点和渊点的个数为r（记为q_j，$1\leq j\leq r$），那么 f 至少存在 r 个不同的周期轨道．

证明 由定理1知，环绕着每个q_j（$1\leq j\leq r$）都有一个周期轨道L_{q_j}，又由系1可设 f 不是P^2 上仅有一个源（渊）点的动力系统．于是每个L_{q_j}是双侧的．不妨设对源点q_1 和q_2 有$L_{q_1}=L_{q_2}$．现用σ_i（$i=1,2$）表示其意义如定理1证明中的σ 相同的简单闭曲线．D_i（$i=1,2$）表示σ_i 在M^2 上所界的含q_i 的闭圆盘．显然可设$D_1\cap D_2=\phi$．由$L_{q_1}=L_{q_2}$ 是双侧的，于是存在L_{q_1} 的充分小的ε一邻域$N(\varepsilon)$是一柱面，设$q_i\notin N(\varepsilon)$．因为任$x\epsilon\sigma_1\cup\sigma_2$ 有$\Omega(x)=L_{q_1}$，故可取充分大的 t 使$f(\sigma_1,t)$和$f(\sigma_2,t)$均含于$N(\varepsilon)$中，显然$f(\sigma_1,t)$与$f(\sigma_2,t)$在$N(\varepsilon)$中界成一含L的闭柱面$N_1(\varepsilon)$．又$f(D_1,t)$和$f(D_2,t)$是不交的闭圆盘，且$f(D_i,t)\cap N_1(\varepsilon)=f(\sigma_i,t)$（$i=1,2$）．由此可见$f(D_1,t)\cup N_1(\varepsilon)\cup f(D_2,t)$是一二维球面．由$M^2$ 的连通性和不可定向性，这是不可能的．系2得证．

定理2 M^2 上任C^1动力系统 f 存在单侧周期轨道的充要条件是存在简单闭曲线C使得C在M^2上界成一不含 f 奇点的Möbius 带邻域M，且在M上含 f 的一正半（负半）轨．

证明 必要性：设L是 f 的一单侧周期轨道，于是存在充分小的ε 使L的ε一邻域$V(L,\varepsilon)$是一不含奇点的Möbius 带．显然$V(L,\varepsilon)$的边界圆就是所求的C，且L就是$V(L,\varepsilon)$内的正（负）半轨道．

充分性：设$q\epsilon M$ 且$f(q,R^+)\subset M$，于是$\Omega(q)\subset M$，因M上无奇点及Möbius 带上不存在非闭P^+（P^-）稳定轨道，故$\Omega(q)$只能是一个周期轨道L_0．设L_0是双侧的，那么L_0在M上不能界成圆盘．因而由Möbius 带的拓扑性质得到．L_0在M上界成一闭 Mobius 带M_0．显然M_0上无奇点，且M_0是 f 的紧致不变集．

往证M_0上存在f的单侧周期轨道．首先我们知道在M_0上存在f的周期轨道．令N表示f在M_0上全体周期轨道所组成的点集．对任$p\in\overline{N}$（$\overline{N}$表N的闭包），易见p是f的非游荡常点，若p不是$P^+(P^-)$稳定的，那么$\Omega(p)(A(p))$就只能是奇点（〔6〕），由M_0上无奇点也无非闭P式稳定轨道，故过p的轨道只能是周期的，这表明$\overline{N}=N$，从而N是闭集，N也是紧致的．若f在M_0上所有周期轨道都是双侧的，那么对每个周期轨道存在ε一邻域$V(L,\varepsilon)$是一开柱面．由N的紧致性得到，存在有限个周期轨道$L_1,L_2,\cdots,L_k$使得$N\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}V(L_i,\varepsilon_i)$．另外由于$L_i(i=1,2,\cdots)$是双侧的．故从Möbius带的拓扑性质知，$L_i$与L围成柱面，因而存在周期轨道，不妨设为$L_k$使$L_1,\cdots,L_{k-1}$均含于$L_k$与L所围的闭柱面（当$L_k=L$时，我们把L也视为闭柱面）$\mathscr{L}$中，从而$\mathscr{L}\cup V(L_k,\varepsilon_k)$是$M_0$中一端以L为边界而另一端是无边的半开柱面．由$M_0$不可定向知$M_0-(\mathscr{L}\cup V(L_k,\varepsilon_k))\neq\phi$，取$p\in M_0-(\mathscr{L}\cup V(L_k,\varepsilon_k))$，$p$不在周期轨道上，但$\Omega(p)$和$A(p)$均为周期轨道且易见$\Omega(p)\cap A(p)=\phi$．设$\Omega(p)=L'$，$A(p)=L''$，我们说或$L'\notin N$或者$L''\notin N$．事实上若$L'\subset N$，那么易见N含于L与$L'$所围的闭柱面$\mathscr{L}'$中，这样$M_0-\mathscr{L}'$就是一无边的Möbius带$M_1$，由于$p\in M_0-(\mathscr{L}\cup V(L_k,\varepsilon_k))\subset M_0-\mathscr{L}'$，而且$L'\cap L''=\phi$，故$L''\subset M_0-\mathscr{L}'$，但$N\subseteq\mathscr{L}'$，所以$L''\notin N$，这与N的假设相矛盾．矛盾表明$f$在$M_0$上存在单侧周期轨道．定理2得证．

由定理2和射影平面的拓扑性质不难看到，当f是P^2上仅有一个源（渊）点的动力系统时，f必有单侧周期轨道．

下面我们利用上述结果就Klein瓶上动力系统的周期轨道的存在性做些具体的讨论．我们用K^2表示Klein瓶．

引理 在K^2上任动力系统f的非游荡常点或位于周期轨道上或位于由奇点和线轨道组成成的奇闭轨上．

证明 由〔5〕的定理Th(K′)和〔3〕的引理1立即可以得到．

推论 若K^2上动力系统f的非游荡常点不在奇闭轨上，则f的中心阶数$d(f)=1$．

证明是简单的，故从略．

从引理立即得到：

定理3 K^2上任动力系统f存在周期轨道的充要条件是存在不位于奇闭轨道上的非游荡常点．

定理4 设f是K^2上无奇点的动力系统，则：

（1）任$p\in K^2$有$\Omega(p)$和$A(p)$均为周期轨道；

（2）若$p\in K^2$是非周期的，且$\Omega(p)\cap A(p)\neq\phi$，那么$\Omega(p)=A(p)$是一双侧周期轨道；进而可知$f$的轨道拓扑等价于不定向的螺旋域；

（3）f或无单侧周期轨道或同时存在两条单侧周期轨道；

（4）若L是f的一双侧周期轨道，那么当L不分割K^2时，f不存在单侧周期轨道；而当L分割K^2时，f存在两条单侧周期轨道．

证明 （1）由K^2紧致，故对任$p\in K^2$有$\Omega(p)\neq\phi$，又因f无奇点及K^2上不存在非闭P式轨道，故易见$\Omega(p)$是一周期轨道．

（2）由（1）及$\Omega(p)\cap A(p)\neq\phi$，从而$\Omega(p)=A(p)$．设$\Omega(p)=L$．由于单侧周期

轨道或是稳定的或是不稳定的，故L只能是双侧的．由于f在K^2上无奇点，所以L不能围成圆盘，因此由K^2的拓扑性质（〔5〕），若L将K^2分成两部分，那么这两部分各为一Möbius带，这样轨道$f(p;R)$只能位于其中一个Möbius带中，例如在M_1中，此时易见$f(p,R)$不可能同时以M_1的边界为正向和负向极限集．因此L不能分割K^2．这样沿L将K^2割开后便得到一平面圆环$\mathscr{S}$（〔5〕的附注）（见图2）因而若K^2还有异于L的周期轨道L_1，那么L_1必将$\mathscr{S}$分成两个圆环，但是，因$\Omega(p)=A(p)=L$，所以这不可能．从而由（1）知，对任$q\in K^2$有$\Omega(q)=A(q)=L$，进而可见f的轨道拓扑等价于一不定向的螺旋域．

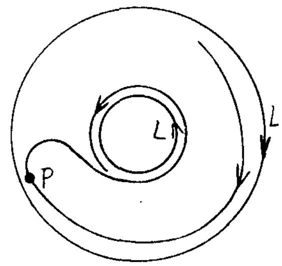

图 2

（3）由（2）知，f可以无单侧周期轨道．若f存在单侧周期轨道L，那么，由K^2的拓扑性质（〔5〕），沿L将K^2割开便得到一Möbius带M，然后利用定理2得到在M内存在单侧周期轨道L_1．

（4）由K^2的拓扑性质（〔5〕）及f无奇点，因此当L不分割K^2时，沿L将K^2割开得到一圆环，故此时f无单侧周期轨道；否则，沿L将K^2割开得到两个Möbius带M_1、M_2，于是由定理2，在M_1、M_2上分别存在f的一条单侧周期轨道．定理4得证．

定理5 设f是K^2上仅有有限个简单奇点的动力系统，若f不含渊（源）点；且无由鞍点和线轨道组成的奇闭轨，则f存在周期轨道．

证明 由定理4知，当f无奇点时，f必有周期轨道存在．下设f有奇点，由于源点的指标为-1，鞍点的指标为-1，因此由指标定理知，f的源点个数与鞍点个数相等．任取一源点，由鞍点个数有限，因而必有$x\in K^2$使得$A(x)=\{q\}$，而$\Omega(x)$含有常点p，由引理知p或位于周期轨道上，或位于由奇点和线轨道组成的奇闭轨上．若是后者，那么由〔3〕的引理1的证明知，此奇闭轨只能是由鞍点和线轨道组成．但由假设，这不可能．故p位于闭轨上．定理5得证．

最后我们还指出：事实上，在定理5的条件下，对任$x\in K^2$有，或者$\Omega(x)$是一鞍点，或者$\Omega(x)$是一周期轨道．

本文在写作过程中得到陈藻平教授的鼓励和支持，对此作者表示衷心的感谢．

参 考 文 献

〔1〕余澍祥，数学学报，23.5（1980），712—719．
〔2〕董镇喜，北京大学学报，1982，第五期．
〔3〕何连法，河北师范大学学报（自然科学版），2(1985)，32—36
〔4〕董镇喜，数学研究与评论，1983年第三期，63—66．
〔5〕何连法，数学学报，27.2（1984），223—231．
〔6〕Neumann，D. A.，Proc. Amer Math. Soc.，61(1979)，39—43.