关于Kobayashi微分度量的连续性*

张 锦 豪

（复旦大学，上海）

由Kobayashi在1967年引入且以他的名字命名的度量[2]已被证明是一类重要的度量．它非常适于研究复流形之间的全纯映射．但是长期以来，对它的光滑性知道甚少．到目前为止，在一般复流形的切丛上，人们只知道它为上半连续的[4]．这限制了它的进一步应用．在这篇短文中，我们将证明在相当广泛的一类复流形的切丛上Kobayashi微分度量的连续性．

设X为复流形，Δ为复平面上的单位园．记$X(\Delta)$为从Δ到X的全纯映射全体．对于$p\in X$，及p点的一个切向量ζ，Kobayashi伪微分度量定义为

$$F(p,\zeta)=\inf\{a;\ a>0,\ \exists f\in X(\Delta),\ f(0)=p,\ f'(0)=\zeta/a\} \quad (1)$$

设$q\in X$为另一点，则在X上定义p与q之间的伪距为

$$d(p,q)=\inf_{\gamma}\int_{\gamma}F(E,\gamma'), \quad (2)$$

这里γ取遍所有连结p和q的分片光滑曲线．

若（2）式定义的d为X上的距离函数，(此时对任意的$p,q\in X$，$p\neq q$，有$d(p,q)>0$)，则称X具备Kobayashi度量，或者称X为双曲流形．如果任一关于距离d的有界集在X内紧，则称X为完备双曲流形．熟知，它等价于按Cauchy序列收敛意义下的完备[3]．

引理1 若X为完备双曲流形，则X为“绷紧”(taut)流形，即若Y为任意另一复流形，则从Y到X的全纯映射族X(Y)为正规族．

其证明见〔1〕.

引理2 若X为完备双曲流形，则Kobayashi微分度量在X的切丛T(X)上连续．

证明 设$(p,\zeta)\in T(X)$，在T(X)中取一个序列$(p_k,\zeta_k)\to(p,\zeta)$．对任意给定的$\varepsilon>0$，由（1）式的定义，可以找到$f_k\in X(\Delta)$，$f_k(0)=p_k$，$f_k'(0)=\zeta_k/a_k$，且

$$a_k<F(p_k,\zeta_k)+\frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

由引理1，$\{f_k\}$为正规族，因此存在子序列$\{f_{k_l}\}$在Δ中内闭匀敛于某个全纯映射$f(z)$，不妨设同时$\lim\limits_{l\to\infty}a_{k_l}=a$．显然$f(z)\in X(\Delta)$，且由选取$f_k$的条件可知在$\zeta\neq0$时，$f'(0)\neq0$．因此$f$不可能为常值映射，它满足条件

$$f\in X(\Delta),\ f(0)=p,\ f'(0)=\zeta/a.$$

注意到适当修改f_k，可不妨假定$\{f_k\}$本身收敛．于是由（1）式中$F(p,\zeta)$的定义，当k充分大时成立

$$F(p,\zeta)-\frac{\varepsilon}{2}<a-\frac{\varepsilon}{2}\le a_k<F(p_k,\zeta_k)+\frac{\varepsilon}{2},$$

* 1985年7月15日收到.

或者

$$F(p,\zeta)<F(p_k,\zeta_k)+\varepsilon. \quad (4)$$

另一方面，从$F(p,\zeta)$的上半连续性可知

$$F(p_k,\zeta_k)<F(p,\zeta)+\varepsilon. \quad (5)$$

(4)、(5)二式给出了$F(p,\zeta)$的连续性．证毕．

由引理2及熟知的Kobayashi度量的性质[3]，易知在下列流形的切丛上Kobayashi度量是连续的．

1、第二类Siegel域S：

$$S=\{(z,u)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m;\ \mathrm{Im}z-F(u,u)\in V\}, \quad (6)$$

其中V是$\mathbf{R}^n$中不含有整条直线的某个凸锥．$F(u,v)$是从$\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^m$到$\mathbf{C}^n$的映射，满足下列条件：

(i) $F(u,v)=\overline{F(v,u)}$，$u,v\in\mathbf{C}^m$；

(ii) $F(au_1+bu_2,v)=aF(u_1,v)+bF(u_2,v)$，$u_1,u_2,v\in\mathbf{C}^m$，$a,b\in\mathbf{C}$；

(iii) $F(u,u)\in\overline{V}$ （$\overline{V}$为V的闭包），$u\in\mathbf{C}^m$；

(iv) $F(u,u)=0$ 仅当$u=0$．

2、广义解析多面体P，它是某个区域$G\subset\mathbf{C}^n$中集合

$$\{|f_a(z)|<1,\ a\in A,\ f_a\in\mathrm{Hol}(G)\} \quad (7)$$

的一个紧的连通开子集，这里A为不一定有限的指标集；

3、完备双曲流形的复盖流形；

4、完备双曲流形上一个有界全纯函数的非零点集构成的开子流形；

5、其全纯截曲率以某个负数为上界的完备Hermite流形；

6、底空间及其纤维均为完备双曲流形的全纯纤维丛．

下面记Aut(X)为复流形X的解析自同胚群．

定理3 若X为双曲流形，且X/Aut(X)紧，则Kobayashi微分度量在T(X)上连续．

证明 只需证明符合定理条件的X为完备双曲流形．由于X/Aut(X)紧，所以存在紧集$K\subset X$，使得对于每个$p\in X$，存在$G\in\mathrm{Aut}(X)$，$G(p)\in K$．因为X具备Kobayashi度量，因此存在$\varepsilon>0$及紧集$K'\subset X$，$K\subset\mathrm{int}K'$，使得对一切$p\in K$，$q\in K'$，有$d(p,q)>\varepsilon$．这是由于$K\subset\mathrm{int}K'$，K为紧集时，存在$\varepsilon>0$，使得对$\forall p\in K$，以p为中心．ε为半径的球$B(p,\varepsilon)\subset\mathrm{int}K'$．从而对任何$q\in K'$，有$q\in B(p,\varepsilon)$，所以$d(p,q)>\varepsilon$．

假定$\{p_k\}$为X上Kobayashi意义下的任一Cauchy序列．对上述的ε，存在k_0，当$k,l>k_0$时，$d(p_k,p_l)<\varepsilon$．设$G\in\mathrm{Aut}(X)$使$G(p_0)\in K$．在双全纯变换下Kobayashi度量不变，所以当$l\geq k_0$时$d(G(p_{k_0}),G(p_l))=d(p_{k_0},p_l)<\varepsilon$．这样一来，对一切$l\geq k_0$，$G(p_l)\in K'$．但是$K'$是X中的一个紧集，因此$G(p_l)$在$K'$中有聚点$q_0$．由于$\{G(p_l)\}$也是Cauchy序列，因此$G(p_l)\to q_0$，即$p_l\to G^{-1}(q_0)\in X$．这表明X是完备双曲流形．证毕．

我们称复流形M为复流形X所穷竭，如果存在一列单叶全纯映射φ_j：$X\to M$，使得对任何紧集$K\subset M$，存在指标j_0，当$j>j_0$时，$K\subset\varphi_j(X)$．下面往往记$M_j=\varphi_j(X)$．这样，也称M为$\{M_j\}$所穷竭．

引理4 若分别记M_j、M上的Kobayashi微分度量为F_j、F_M，则当M为$\{M_j\}$所穷

竭时，成立

$$\lim_{j\to\infty} F_j(p,\zeta)=F_M(p,\zeta) \qquad \forall p\in M,\ \zeta\in \mathbf{C}^n.$$

证明 给定$p\in M$及p点的一个切向量ζ．由（1）式的定义；可取出一列$f_k\in M(\Delta)$，$f_k(0)=p$，$f_k'(0)=\zeta/a_k$，且

$$\lim_{k\to\infty} a_k=F_M(p,\zeta)). \tag{8}$$

不妨设$f_k(\Delta)\subset\subset M$（对$f_k$稍作修改即成）．于是对紧集$\overline{f_k(\Delta)}$，存在整数$j_k$，当$j>j_k$时，$\overline{f_k(\Delta)}\subset M_j$，因此

$$a_k\geq F_j(p,\zeta). \tag{9}$$

另一方面，由于$M_j\subset M$，显然成立

$$F_j(p,\zeta)\geq F_M(p,\zeta). \tag{10}$$

综合(8)、(9)、(10)三式给出$F_M(p,\zeta)\leq\underline{\lim}F_j(p,\zeta)\leq\overline{\lim}F_j(p,\zeta)\leq\lim\limits_{k\to\infty}a_k=F_M(p,\zeta)$．此即所求．证毕．

定理 5 设复流形M为复流形X所穷竭，X/Aut(X) 紧，则Kobayashi度量在T(M)上连续．

证明 设M_j，φ_j的意义如前．取$p_0\in M_1$．由于X/Aut(X) 紧，存在紧集K，使$X=\bigcup\limits_{G\in Aut(X)}G(K)$．因此可以对每个$j$，选取$G_j\in Aut(X)$，使得$G_j\circ\varphi_j^{-1}(p_0)\in K$．令$\psi_j=G_j\circ\varphi_j^{-1}$，则$\psi_j$：$M_j\to X$为双全纯映射．由定理3的证明，X为完备双曲流形．按引理1，$\{\psi_j\}$为正规族．由于$\psi_j(p_0)\in K$，$\forall j$，因此不存在紧发散子序列．取其收敛子序列为$\{\psi_{j'}\}$，其极限映射为ψ：$M\to X$．它也是全纯映射，但不一定一一．注意到M也为$\{M_{j'}\}$所穷竭，由引理4及定理3得到

$$F_M(p,\zeta)=\lim_{j'\to\infty}F_{j'}(p,\zeta)=\lim_{j'\to\infty}F_X(\psi_{j'}(p),\ \psi_{j'}'(p)\cdot\zeta)=F_X(\psi(p),\ \psi'(p)\cdot\zeta).$$

显然$(\psi(p),\ \psi'(p)\cdot\zeta)$是$(p,\varepsilon)$的连续映射，因此$F_M(p,\zeta)$在T(M)上连续．证毕．

参 考 文 献

[1] Kiernan, P. J., Bull. Am. Math. Soc., 76(1970), pp. 49—51.

[2] Kobayashi, S., J. Math. Soc. Japan, 19(1967), pp. 460—480.

[3] Kobayashi, S. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marem Dekker, Inc., New York, 1970.

[4] Royden, H. L., Remarks on the Kobayashi metrlc, Several Complex Variables Ⅱ, Maryland, 1970. Springer, Berlin, 1971, pp. 125—137.

On Continuity of the Kobayashi Differential Matric

Zhang Jin hao

(Fudan University)

Abstract

The main result of this paper is that the Kobayashi differential metric is continuous on the tangent bundle of a complex manifold if the Kobayashi metric is complete.