1988年8月

数学研究与评论
第八卷　第三期

泛函型统计量的随机加权逼近*

涂冬生

（中国科学院系统科学研究所，北京）

§1 引言及一般结果

设X_1，X_2，…，X_n是来自分布为F(未知）的总体的n个iid.样本．它们的经验分布为

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I\{X_i\le x\}. \tag{1}$$

常用的许多统计量都是通过经验分布而依赖于样本的，即能写成经验分布的泛函形式

$$T_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)=T(F_n) \tag{2}$$

例如，样本均值$\overline{X}_n=\int x\mathrm{d}F_n(x)$，样本中位数$\widetilde{X}_n=F_n^{-1}(\frac{1}{2})$等．我们称$T_n$为泛函型统计量，它所实际估计的总体参数为$T(F)$．

设T在F处具有Gâteaux导数

$$\dot{T}(F)(G-F)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}T(F+\varepsilon(G-F))|_{\varepsilon=0}=\int\psi(x,F)\mathrm{d}G(x) \tag{3}$$

这里$\int\psi(x,F)\mathrm{d}F(x)=0$．我们在$F$处对$T(F_n)$作Taylor型展开

$$T(F_n)-T(F)=\dot{T}(F)(F_n-F)+R(F_n,F) \tag{4}$$

其中$R(G,F)=T(G)-T(F)-\int\psi(x,F)\mathrm{d}G(x)$．由Serfling[1]中的讨论，我们可以得到$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))$的渐近分布．

引理1　设$0<\sigma^2=\mathrm{VAR}_F\{\psi(x,F)\}<\infty$，$\sqrt{n}R(F_n,F)\to$，则

$$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,\sigma^2) \tag{5}$$

由于σ^2通常都是未知的，上面的结果在实际使用时并不太方便．因此，我们希望能用样本直接构造σ^2的一个估计．Quenouille－Tukey的Jackknife方法[2]和Efron的Bootstrap方法[3]指出了处理这一问题的一般途径．事实上，Bootstrap方法更进一步，它考虑的是构造$\sqrt{n}\times(T(F_n)-T(F))$的分布的逼近，因此可以用来处理与$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))$的分布有关的一些统计问题．

我们下面准备应用随机加权的思想[4]，提供$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))$的分布的一种新逼近．它也可以用来构造方差估计和置信区间等．

设V_1，V_2，…，V_n为随机变量，满足$V_1+V_2+\cdots+V_n=1$．V_1，V_2，…，V_n的联合分布为

*1986年5月26日收到．

Dirichlet $D(1,\cdots,1)$ 分布，即$V_1,V_2,\cdots,V_{n-1}$在$S_{n-1}=\{(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}):v_i\geq 0$，$i=1,2,\cdots,n-1$ $\sum_{i=1}^{n-1}v_i\leq 1\}$ 上具有均匀分布

$$f(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1})=(n-1)!$$

令$H_n(x)=\sum_{i=1}^{n}V_iI\{X_i\leq x\}$，它称为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的随机加权经验分布．我们用$\sqrt{n}\cdot[T(H_n)-T(F_n)]$ 的分布去模拟$\sqrt{n}[T(F_n)-T(F)]$ 的分布．具体做法是：固定原来的 n 个样本，随机地产生 $n-1$ 个 $(0,1)$ 上的均匀分布的样本$U_1^{(1)}$，$U_2^{(2)}$，$\cdots$，$U_{n-1}^{(1)}$．设$U_{(1)}^{(1)}$，$U_{(2)}^{(1)},\cdots,U_{(n-1)}^{(1)}$为它们的次序统计量．记$U_{(0)}^{(1)}=0$，$U_{(n)}^{(1)}=1$，令$V_i^{(1)}=U_{(i)}^{(1)}-U_{(i-1)}^{(1)}$ $(i=1,2,,\cdots,n)$，它们即为服从$D(1,1,,\cdots,1)$ 分布的随机变量．利用它们计算$T_1=\sqrt{n}(T(H_n^{(1)})-T(F_n)]$，得到了一个新的样本．以上步骤重复地进行$N$次，得到$T_1,T_2,\cdots,T_N$．构造它们的直方图，即得到$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))$ 的分布的逼近．σ^2的估计为

$$\sigma_n^2=\frac{1}{N-1}\cdot\sum_{i=1}^{N}(T_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}T_i)^2.$$

下面的定理保证了对于满足一定条件的$T(F_n)$，随机加权法从样本意义上来说是可用的．

定理 1 若$0<\mathrm{VAR}_F\{\psi(x,F)\}<\infty$，且

(i) $P\{|\sqrt{n}R(H_n,F_n)|>\varepsilon|X_1,X_2,\cdots,X_n\}\to 0$ a.s.,

(ii) $\int(\psi(x,F_n)-\psi(x,F))^2\mathrm{d}F_n\to 0$ a.s.,

则对几乎所有样本列$X_1,X_2,\cdots$，

$$\sqrt{n}(T(H_n)-T(F_n))\xrightarrow{\mathscr{L}^*}N(0,\sigma^2) \tag{6}$$

这里及以下$\mathscr{L}^*,P^*,E^*,\mathrm{VAR}^*$分别表示给定$X_1,X_2,\cdots,X_n$时，条件分布的弱收敛，条件概率，条件均值，条件方差等．

证 由于$T(H_n)-T(F_n)=\dot{T}_{F_n}(H_n-F_n)+R(H_n,F_n)$，而由条件(i)，对于几乎所有$X_1$，$X_2,\cdots$，$\sqrt{n}R(H_n,F_n)\xrightarrow{P^*}0$，因此为证(6)，由Slutzky定理[1]，我们只需证明：对几乎所有样本列$X_1,X_2,\cdots$，

$$\sqrt{n}\dot{T}_{F_n}(H_n-F_n)=\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\psi(X_i,F_n)\xrightarrow{\mathscr{L}^*}N(0,\sigma^2). \tag{7}$$

由V_i的取法，条件(ii)

$$\begin{aligned}&\mathrm{VAR}^*\{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i(\psi(X_i,F_n)-\psi(X_i,F))\}\\&=\frac{1}{n+1}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\psi(X_i,F_n)-\psi(X_i,F))^2-n\Big[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\psi(X_i,F_n)-\psi(X_i,F))}{n}\Big]^2\Big\}\\&=\frac{1}{n+1}\int(\psi(x,F_n)-\psi(x,F))^2\mathrm{d}F_n-\frac{1}{n+1}\Big(\int\psi(x,F_n)\mathrm{d}F_n-\int\psi(x,F)\mathrm{d}F_n\Big)^2\\&\to 0\ \text{a.s.}\end{aligned}$$

因此$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i(\psi(X_i,F_n)-\psi(X_i,F))\xrightarrow{P^*}0$ a.s..

而由［4］对样本均值的随机加权逼近的结果

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\ \psi(X_i,F)\xrightarrow{\mathcal{L}^*}N(0,\sigma^2)\text{ a.s..}$$

于是再由Slutzky定理，我们即知对几乎所有样本列X_1，X_2，…，

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\ \psi(X_i,F_n)=\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i\psi(X_i,F)+\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}V_i(\psi(X_i,F_n)-\psi(X_i,F))\xrightarrow{\mathcal{L}^*}N(0,\sigma^2).$$

定理得证.

§2 具 体 例 子

从定理1中我们可以看出：为了说明随机加权法对某可微泛函型统计量是可用的，我们只要对它们验证定理1的条件（i）、(ii)，在这一节中，我们讨论Von－Mises统计量，L统计计量等例子.

Ⅰ. Von-Mises统计量和U统计量

令$T(F)=\int\int\varphi(x,y)\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y)$，其中$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$. 我们称$T(F_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(X_i,X_j)$为Von-Mises统计量. 与此相关的还有$U$统计量$T_n(I_n)=\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i\neq j}\varphi(X_i,X_j)$

$$=\frac{n}{n-1}T(F_n)-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\varphi(X_i,X_i).$$

对于Von-Mises统计量，我们有下面的结论.

引理2 若$\int\varphi^2(x,y)\,\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}F(y)<\infty$，$\int\varphi^2(x,x)\,\mathrm{d}F(x)<\infty$，则

$$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))\xrightarrow{\mathcal{L}}N(0,\sigma^2),\tag{8}$$

其中$\sigma^2=4[\int\{\int\varphi(x,y)\,\mathrm{d}F(y)\}^2\mathrm{d}F(x)-T^2(F)]$.

我们下面证明对于Von-Mises统计量，随机加权法是可用的. 此时$T(H_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_iV_j\varphi(X_i,X_j)$.

定理2 设引理2的条件满足，则对几乎所有样本列X_1，X_2，….

$$\sqrt{n}(T(H_n)-T(F_n))\xrightarrow{\mathcal{L}^*}N(0,\sigma^2).\tag{9}$$

证 对于Von-Mises统计量$\psi(x,F)=2\{\int\varphi(x,y)\,\mathrm{d}F(y)-T(F)\}$，$R(H_n,F_n)=\int\int\varphi(x,y)\cdot\mathrm{d}(H_n-F_n)(x)\,\mathrm{d}(H_n-F_n)(y)=\sum_{i,j}V_iV_j\varphi(X_i,X_j)-\frac{1}{n}\sum_{i,j}V_i\varphi(X_i,X_j)-\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}V_j\varphi(X_i,X_j)$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j}\varphi(X_i,X_j).$$

由定理1，我们只需证明条件（i）、(ii)满足. 而在［5］中Bickel等证明了对于Von Mises统计量，条件（ii)是成立的. 因此，我们只要验证条件（i)，即对几乎所有X_1，X_2，

$\cdots, \sqrt{n}R(H_n, F_n) \xrightarrow{P^*} 0$.

设Z_1，Z_2，…，Z_n 是服从均值为1 的指数分布的 n 个iid. 样本，由指数分布的性质，$(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 与 $\left(z_1 / \sum_{i=1}^{n} z_i,\ z_2 / \sum_{i=1}^{n} z_i, \cdots, z_n / \sum_{i=1}^{n} z_i \right)$ 同分布，因此$R(H_n, F_n)$ 与

$$\frac{\sum_{i,j} z_i z_j \varphi(X_i, X_j)}{\left(\sum_{i=1}^{n} z_j\right)^2} - \frac{\sum_{i,j} z_i \varphi(X_i, X_j)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)} - \frac{\sum_{i,j} z_j \varphi(X_i, X_j)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)} + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} \varphi(X_i, X_j)$$

同分布． 而由强大数定理$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \to 1\ a.s.$．因此为证（9），我们只要证明对几乎所有 X_1，X_2，…，

$$I_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}\Big[\sum_{i,j} z_i z_j \varphi(X_i, X_j) - \sum_{i,j} z_i \varphi(X_i, X_j) - \sum_{i,j} z_j \varphi(X_i X_j) + \sum_{i,j} \varphi(X_i X_j)\Big]$$

$$= n^{-\frac{3}{2}} \sum_{i,j} (z_i - 1)(z_j - 1)\varphi(X_i, X_j) \xrightarrow{P^*} 0 .$$

而

$$E^*\Big[n^{-\frac{3}{2}}\sum_{i,j}(z_i - 1)(z_j - 1)\varphi(X_i, X_j)\Big]^2 = \frac{E(z_1 - 1)^4}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(X_i, X_i)$$

$$+ \frac{E(z_1 - 1)^2(z_2 - 1)^2}{n^3}\Big\{\sum_{i \neq j}\left[\varphi^2(X_i, X_j) + \varphi(X_i, X_i)\varphi(X_j, X_j)\right]\Big\}.$$

由强大数律$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(X_i, X_i) \to E\varphi^2(X_1, X_1)\ a.s.$．

令$h(x, y) = \varphi^2(x, y) + \varphi(x, x)\varphi(y, y)$，则由$U$统计量的强大数定理

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j}\left[\varphi^2(X_i, X_j) + \varphi(X_i, X_i)\varphi(X_j, X_j)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i \neq j} h(X_i, X_j)$$

$$= \frac{2\binom{n}{2}}{n^2}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j} h(X_i, X_j) \to Eh(X_1, X_2)\ a.s.$$

于是$E^*(I_n^2) \to 0\ a.s.$，即对几乎所有样本列X_1，X_2，…，有$I_n \xrightarrow{P^*} 0$．

至此，定理得证.

由U统计量和Von-Mises统计量的关系，我们可以得到

定理 3 取$U_n^* = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j} V_i V_j \varphi(X_i, X_j)$ 为$U_n = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}\varphi(X_i, X_j)$ 的随机加权统计量，则在引理 1 的条件下，对几乎所有样本列X_1，X_2，…，

$$\sqrt{n}(U_n^* - U_n \xrightarrow{\mathscr{L}^*} N(0,\sigma^2) \tag{10}$$

其中σ^2 的定义与定理 2 中的相同.

2. L 统 计 量

我们考虑形如$T(F_n)=\int_0^1 F_n^{-1}(t)J(t)\mathrm{d}t$的$L$统计量，其中$J(t)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数. 为了讨论$T(F_n)$ 的渐近分布，我们还引进下面两组假设：

假设A J 几乎处处有界和连续，并且有$0<\alpha<\beta<1$，使得$J(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 之处为零.

假设B J 在 $[0,1]$ 上连续，且$\int_{-\infty}^{\infty}[F(y)(1-F(y))]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y<\infty$.

引理3 设假设 A 或 B 满足，令

$$h(F,x)=-\int_{-\infty}^{\infty}(I(y\geq x)-F(y))J(F(y))\mathrm{d}y.$$

若 $0<\sigma^2=\mathrm{VAR}_F h(F,x)<\infty$，则

$$\sqrt{n}(T(F_n)-T(F))\xrightarrow{\mathscr{L}} N(0,\sigma^2). \tag{11}$$

$T(F_n)$的随机加权统计量为 $T(H_n)=\int_0^1 H_n^{-1}(t)J(t)\mathrm{d}t$，我们下面讨论它的渐近分布. 先证明几个引理.

引理4 记 $\|h\|_\infty=\sup\limits_x|h(x)|$，对几乎所有样本列$X_1, X_2, \cdots$,

$$\|H_n-F_n\|_\infty\to 0\ a.s.. \tag{12}$$

证 由经验分布的Glivenko-Cantelli定理，$\|F_n-F\|_\infty\to 0\ a.s.$. 因此为证（12），只须证明 $\|H_n-F\|_\infty\to 0\ a.s.$. 我们先证明：若 x 固定，则对几乎所有样本列$X_1, X_2, \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}H_n(x)=F(x)\ a.s.$. 由于$H_n(x)$与$\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i I\{\ _i\leq x\}\right)\Big/\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i\right)$ 同分布，这等价于证明对几乎所有样本列$X_1, X_2, \cdots$, $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i I\{X_i\leq x\}\to F(x)\ a.s.$.

令 $A_k=\sum\limits_{i=1}^k I\{X_i\leq x\}$, $N(n)=\#\{k: A_k/I\{X_k\leq x\}\leq n\}$, 由于$\lim\limits_{k\to\infty}A_k/k=F(x)\ a.s.$. 对固定$x$，不妨设$F(x)>0$，于是总存在$\varepsilon$，使$F(x)-\varepsilon>0$，因此$\exists k_0$，$k\geq k_0$时，$A_k/k\geq F(x)-\varepsilon\ a.s.$. 于是

$$N(n)\leq\#\{k: A_k\leq n\}=\#\{k\leq k_0: A_k\leq n\}+\#\{k>k_0: A_k/k\leq n/k\}$$

$$\leq k_0+\#\{k\geq k_0: F(x)-\varepsilon\leq n/k\}\leq\left[\frac{n}{F(x)-\varepsilon}\right]\quad a.s.,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} N(n)/n \leq \frac{1}{F(x)-\varepsilon} < \infty. \quad a.s..$$

因此，由Stout[6]定理4.1.1，对几乎所有X_1，X_2，…，

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)I\{X_i\leq x\}/A_n \to 0 \quad a.s.,$$

即$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i I\{X_i\leq x\}\to F(x)\,a.s.$. 所以对几乎所有$X_1$，$X_2$，…，$\lim_{n\to\infty}H(x)=F(x)\,a.s.$.

由$H_n(x)$的单调性及上面的结论，与经验分布的Glivenko—Cantelli定理的证明步骤[7]同，即可得到$\|H_n-F\|_\infty\to 0\ a.s.$. 引理证毕.

引理 5 记$\|h\|_{L_1}=\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|\mathrm{d}x$，若$\int[F(x)(1-F(x))]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x<\infty$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt{n}E^*\{\|H_n-F_n\|_{L_1}\}\leq k<\infty a.s.. \tag{13}$$

证 由于$H_n(x)-F_n(x)$与$\sum_{i=1}^{n}X_i[I\{X_i\leq x\}-F_n(x)]/(\sum_{i=1}^{n}X_i)$同分布，因此为证（13），只要证明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-\frac{1}{2}}E^*\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}X_i[I\{X_i\leq x\}-F_n(x)]\right|\mathrm{d}x\leq K<\infty. \tag{14}$$

而
$$\begin{aligned}
&n^{-\frac{1}{2}}E^*\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}X_i[I\{X_i\leq x\}-F_n(x)]\right|\mathrm{d}x\\
&\leq n^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}E^*\left|\sum_{i=1}^{n}X_i[I\{X_i\leq x\}-F_n(x)]\right|\mathrm{d}x\\
&\leq\sqrt{EX_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x)(1-F_n(x))+F_n(x)[F_n(x)-F(x)]\}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&\to\sqrt{EX_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)(1-F(x))]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x<\infty,
\end{aligned}$$

引理证毕.

定理 4 设假设A或B成立，并在B成立时，还假设J满足一阶Lip条件. 若$0<\sigma^2=\mathrm{VAR}_F h(F,x)<\infty$，则对几乎所有$X_1$，$X_2$，…，

$$\sqrt{n}(T(H_n)-T(F_n))\xrightarrow{\mathscr{L}^*}N(0,\sigma^2). \tag{15}$$

证 记$K(t)=\int_0^t J(u)\mathrm{d}u$，则由［1］§8.1.1引理B，

$$\begin{aligned}
R(H_n,F_n)&=-\int_{-\infty}^{\infty}\{K(H_n(x))-K(F_n(x))-J(F_n(x))[H_n(x)-F_n(x)]\}\mathrm{d}x\\
&=-\int_{-\infty}^{\infty}W_{H_n,F_n}(x)[H_n(x)-F_n(x)]\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

其中

$$W_{G,F}(x)=\begin{cases}\dfrac{K(G(x))-K(F(x))}{G(x)-F(x)}-J(F(x)), & G(x)\neq F(x),\\ 0 & , G(x)=F(x).\end{cases}$$

由引理4及[1] §8.2.4引理A和引理E，在假设A或B之下，对几乎所有X_1，X_2，…，分别有$\|W_{H_n,F_n}\|_{L_1}\xrightarrow{P^*}0$，$\|W_{H_n,F_n}\|_{\infty}\xrightarrow{P^*}0$．

而[8]中证明了$\sqrt{n}[H_n(x)-F_n(x)]\xrightarrow{\mathscr{L}^*}B(F(x))\ a.s.$．所以$\|H_n-F_n\|_\infty=O_{P^*}(\frac{1}{\sqrt{n}})a.s.$，$\|H_n-F_n\|_{L_1}=O_{P^*}(\frac{1}{\sqrt{n}})\ a.s.$．因此在假设A或B之下分别有

$$\sqrt{n}\,|R(H_n,F_n)|\leq\sqrt{n}\,\|H_n-F_n\|_\infty\|W_{H_n,F_n}\|_{L_1}\xrightarrow{P^*}0\ a.s.,$$

$$\sqrt{n}\,|R(H_n,F_n)|\leq\sqrt{n}\,\|H_n-F_n\|_{L_1}\|W_{H_n,F_n}\|_\infty\xrightarrow{P^*}0\ a.s..$$

因此，由定理1，为证（15），我们只要证明：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(h(F_n,X_i)-h(F,X_i))^2\to0\ a.s.. \tag{16}$$

而$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(h(F_n,X_i)-h(F,X_i))^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\int_{-\infty}^\infty[F(y)-I(y\geq X_i)][J(F_n(y))-J(F(y))]\mathrm{d}y$

$$+\int_{-\infty}^\infty[F_n(y)-F(y)]J(F_n(y))\mathrm{d}y\Big)^2$$

$$\leq\frac{C}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\int_{-\infty}^\infty[I(y\geq X_i)-F(y)][J(F_n(y))-J(F(y))]\mathrm{d}y\Big)^2$$

$$+C\Big(\int_{-\infty}^\infty[F_n(y)-F(y)]J(F_n(y))\mathrm{d}y\Big)^2\triangleq I_1+I_2.$$

在假设A之下

$$I_1\leq C\,\|J(F_n)-J(F)\|_{L_1}^2\to0\ a.s.,\quad I_2\leq C\,\|F_n-F\|_\infty\|J(F_n)\|_{L_1}\to0\ a.s..$$

在假设B和J满足Lip条件之下

$$I_1\leq C\,\|J(F_n)-J(F)\|_\infty\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\int_{-\infty}^\infty|I(y\geq X_i)-F(y)|\mathrm{d}y\Big)^2$$

$$\leq C\,\|F_n-F\|_\infty\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\int_{-\infty}^\infty|I(y\geq X_i)-F(y)|\mathrm{d}y\Big)^2\to0\ a.s.,$$

而由经验过程的重对数律[9]，$\sup_x\dfrac{|F_n(x)-F(x)|}{[F(x)(1-F(x))]^{\frac{1}{2}}}=O(\frac{\lg n}{\sqrt{n}})\ a.s.$．所以

$$I_2 \leq C \|J(F)\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} [F(x)(1-F(x))]^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 \frac{\lg n}{\sqrt{n}} \to 0 \ a.s..$$

于是（16） 得证，定理证毕.

感谢陈希孺教授建议作者考虑这一问题. 郑忠国付教授向作者提供［4］、［8］的手稿，在此一并表示感谢.

参考文献

［1］Serfling, R, J., Approximation Theorem of Mathematical Statistics, John wiley and sons., 1980.

［2］Miller, R. G., The jackknife—a review, Biometrika, 6(1974), 1-15.

［3］Efron, B., Ann. Statist., 7(1979), 1-26.

［4］郑忠国，应用数学学报，10(1987), 247—253.

［5］Bickel, P. J., Ann, Statist., 9(1981), 1196-1217.

［6］Stout, W. F., Almost Sure Convergence, Academic press, 1974.

［7］Loeve, M.,, Probability Theory I, 4th ed, Springer-verleg, 1977.

［8］郑忠国，应用概率统计，3(1987), 1-7.

［9］Basu, G. J., Singh, K., Sankhya, Ser, A, 46(1984), 195-206.

Random Weightting the Functional Statistics

Tu Dongsheng

(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

Abstract

Let T_n be a functional of sample empirical distribution function $T_n = T(F_n)$. With some conditions, $\sqrt{n}(T(F_n) - T(F))$ is asymptotic normality. In this paper, we use the ideal of random weightting to approximate the distribution of $\sqrt{n}\cdot(T(F_n) - T(F))$. For Von-Mises statistics, U-statistics and L-statistics, the detail disussion has been made.