数学研究与评论
第八卷　第三期

非周期函数类W^rH^ω的宽度估计 *

房　艮　孙

（北京师范大学）

设f定义在$[a,b]$上，说$f\in W^rH^\omega_{[a,b]}$，$r=0,1,2,\cdots$，如$f^{(r)}\in C_{[a,b]}$，且对一切$x_1x_2\in[a,b]$，有$|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)|\leqslant\omega(|x_1-x_2|)$，其中$\omega$为给定的连续模，$W^0H^\omega_{[a,b]}=:H^\omega_{[a,b]}$. 记

$$NW^r_{p[a,b]}=\{f: f^{(r-1)}\text{在}[a,b]\text{上绝对连续，}\|f^{(r)}\|_{r[a,b]}\leqslant N\}, \quad (1)$$

当$[a,b]=[0,2\pi]$时，$W^rH^\omega[0,2\pi]$、$NW^r_p[0,2\pi]$简记作W^rH^ω, NW^r_p, 相应的2π周期类记作$\widetilde{W^rH^\omega}$, $N\widetilde{W}^r_p$, 设X为线性赋范空间，集$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}\subset X$，记

$$E(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N})_X=:\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{g\in\mathfrak{N}}\|f-g\| \quad (2)$$

$$d_n(\mathfrak{M},X)=:\inf_{X_n}E(\mathfrak{M},\ X_n)_X \quad (3)$$

其中X_n为X中的任意n维子空间，量$d_n(\mathfrak{M},X)$称为集$\mathfrak{M}$在X中的n维Kolmogorov宽度，若有n维子空间序列$\{X_n^*\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}E(\mathfrak{M},X_n^*)_X=\lim_{n\to\infty}d_n(\mathfrak{M},X)$$

则称$\{X_n^*\}$为$\mathfrak{M}$在X内的n维强渐近极子空间，当ω上凸时，Корнейчук、Моторный、Рубан[1]等人求得了$d_n(\widetilde{W^rH^\omega},C)$及$d_n(\widetilde{W^rH^\omega},L)$的精确估计．关于非周期类$W^rH^\omega$的宽度估计，除了G.G.Lorentz[2]给出了W^rH^ω在尺度C及L下的阶的估计外，精确的估计还很少.[3]　我们求得了$d_n(W^rH^\omega,C)$及$d_n(W^rH^\omega,L)$的强渐近估计，改进了G.G.Lorentz的结果．记$\mathscr{P}_r=\mathrm{span}\{1,x,\cdots,x^r\}$，$T_{n-1}=\mathrm{span}\{1,\cos t,\sin t,\cdots,\cos(n-1)t,\sin(n-1)t\}$，$F^r_{2n-1}=\mathscr{P}_r\oplus T_{n-1}$.

定理1　设ω为上凸连续模，X为C或L，则

1．$d_{2n+r}(W^rH^\omega,X)=\|f_{n,r}\|_X(1+O(\frac{1}{n}))$,　(5)

2．F^{r+1}_{2n-1}是$d_{2n+r}(W^rH^\omega,X)$的强渐近极子空间,

其中$f_{n,0}$是以$\frac{2\pi}{n}$为周期的奇函数，当$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2n}$时，$f_{n,0}(t)=\frac{1}{2}\omega(2t)$，当$\frac{\pi}{2n}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n}$时，$f_{n,0}(t)=\frac{1}{2}\omega(\frac{2\pi}{n}-2t)$，$f_{n,r}$为$f_{n,0}$的$r$次周期积分，且周期平均值为零.

证　仅证X=C的情况，X=L的情况是类似的．先考虑$f\in W^rH^\omega_{[0,\pi]}$则$f^{(r)}\in H^\omega_{[0,\pi]}$

* 1985年6月12日收到．本文曾在1984年全国逼近论会议上宣读.

将$f^{(r)}$偶延拓到〔$-\pi,\pi$〕上，仍记为$f^{(r)}$，设$f^{(r)}$的r次周期积分为g，则存在$p_r(x)\in\mathscr{P}_r$，使得

$$f(x)=g(x)+p_r(x),\ \forall x\in[0,\pi] \tag{6}$$

其中$g\in\widetilde{W'H}^{\omega}$. 根据〔1〕，存在$g_{n,r}\in N\widetilde{W}_{\infty}^{r+1}$，使得

$$\|g-g_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant\sup_{b>0}\left(\frac{1}{4}b^r\int_0^{b\pi}R(\varphi_{r+1},b^{-1}t)\omega(t)\mathrm{d}t-NK_{r+1}b^{r+1}\right), \tag{7}$$

其中$R(f,t)$表示f的Σ重排，$\varphi_r(t)$表示以2π为周期的欧拉样条，K_r表示Favard常数[1]

因$g_{n,r}\in NW_{\infty[a,\pi]}^{r+1}$,根据〔4〕，存在$p_{n,r}\in F_{2n-1}^{r+1}$、使得

$$\|g_{n,r}-p_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant N\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}K_{r+1}n^{-r-1}. \tag{8}$$

设$n>r$,$b=\frac{1}{2n}$，取N_n使其达到（7）中的上确界，令$\bar{p}_{n,r}(x)=p_{n,r}(x)+p_r(x)$，则由（6）—（8）推得

$$\|f-\bar{p}_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n}\right)^r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}R(\varphi_r,2nt)\omega'(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{4}N_n\left(\frac{1}{2n}\right)^r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}R(\varphi_r,2nt)\mathrm{d}t$$

$$+N_n\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}K_{r+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n}\right)^r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}R(\varphi_r,2nt)\omega'(t)\mathrm{d}t \tag{9}$$

现设$f\in W^rH^{\omega}$,则$\varphi(x)=f(2x)\in W^rH^{\omega_1}_{[0,\pi]}$，其中$\omega_1(x)=2^r\omega(2x)$,由（9）知，存在$\psi_{n,r}\in F_{2n-1}^{r+1}$,使得$\|\varphi-\psi_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n}\right)^r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}R(\varphi_r,nt)\omega_1'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}\frac{1}{n^r}\int_0^{\frac{\pi}{n}}R(\varphi_r,nt)\omega_1'\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$, 因为$\omega_1'\left(\frac{t}{2}\right)=2^{r+1}\omega'(t)$，所以

$$\|\varphi-\psi_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant\frac{1}{4n^r}\int_0^{\frac{\pi}{n}}R(\varphi_r,nt)\omega'(t)\mathrm{d}t=\|f_{n,r}\|_C$$

设$f\in W^rH^{\omega}$，$p^*_{n,r}(x)=:\bar{p}_{n,r}\left(\frac{x}{2}\right)\in F_{2n-1}^{r+1}$.从而

$$\|f-p^*_{n,r}\|_{C[0,2\pi]}=\|\varphi-\bar{p}_{n,r}\|_{C[0,\pi]}\leqslant\|f_{n,r}\|_C$$

$$d_{2n+r}(W^rH^{\omega},C)\leqslant E(W^rH^{\omega},F^{r+1})_C\leqslant\|f_{n,r}\|_C \tag{10}$$

另一方面，由〔1〕，推得

$$d_{2n+r}(W^rH^{\omega},C)\geqslant d_{2n+r}(\widetilde{W}^rH^{\omega},C)=\|f_{n',r}\|_C \tag{11}$$

其中$n'=n+\left[\frac{r+1}{2}\right]$,易证得

$$\|f_{n,r}\|_C=\|f_{n',r}\|_C\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{12}$$

由（10）—（12），得（5）. 定理1证毕.

根据定理1及〔5〕的结果，我们推得

推论 如$\omega(t)=t^{a}$, $0<t\leqslant1$, $r=0,1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(W^rH^{\omega},\mathscr{P}_n)_C}{d_n(W^rH^{\omega},C)}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{r+a}.$$

这表明$2n+r$阶代数多项式子空间$\mathscr{P}_{2n+r}$对W^rH^ω, $\omega(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$在尺度C下的最佳逼近性能逊于F^{r+1}_{2n-1}，这一现象当$\omega(t)=t$时是由Тихомиов[6]首先发现的.

参 考 文 献

〔1〕Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г., Аппроксимация с ограничениями, Киев, Наукова Думка, 1982.

〔2〕洛伦茨 G.G.，函数逼近论，谢庭藩，施咸亮译，上海科技出版社，上海，1982.

〔3〕Корнейчук Н.П., Изв., АН СССР, сер.мат., 45(1981), 2: 266-290.

〔4〕孙永生，北京师范大学学报

〔5〕Кофанов В.А., Мат.Заметки, 27(1980), 381-390.

〔6〕Тихомиров В.М., УМН, 15(1960) 3: 81-120.

On N-width of Non-periodic Function Class W^rH^ω

Fang Gensun

Abstract

In this paper, we obtain the strong assymptotic values of n-width $d_n(W^rH^\omega, C)$ and $d_n(W^rH^\omega, L)$ for non-periodic function class W^rH^ω, wheve ω is a concave modulus of continuity.