也谈广义对角占优阵的特征值的分布*

张　垚
（湖南教育学院，长沙）

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶复矩阵，记

$$\sigma_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若$|a_{ij}|>\sigma_i(i=1,2,\cdots n)$，则称$A$为（按行）严格对角占优阵，记为$A\in \mathrm{D}$，若$|a_{ii}|\cdot|a_{jj}|>\sigma_i\sigma_j(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$则称$A$为严格对角乘积占优阵，记为$A\in \mathrm{D}_p$（在〔1〕中此类矩阵称为广义对角占优阵，并记为GD）．若存在非奇对角阵$Q=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$使$Q^{-1}AQ\in \mathrm{D}$，则称$A$为准严格对角占优阵，记为$A\in \mathrm{D}'$（见〔2〕）．若存在非奇对角阵$Q=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$使$Q^{-1}AQ\in \mathrm{D}_p$，则称$A$为准严格对角乘积占优阵．记为$A\in \mathrm{D}'_p$．

〔1〕中认为两类矩阵D_p与D'互不包含，本文将证明这一说法是不对的（见定理1），此外，本文给出$A\in \mathrm{D}'$（即$A\in \mathrm{D}'_p$）的特征值分布定理，它包含了〔1〕中定理1的结果．

定理1　$\mathrm{D}'_p=\mathrm{D}'\supset \mathrm{D}_p\supset \mathrm{D}$，其中$\supset$是真包含关系．

证明　（1）$\mathrm{D}_p\supset \mathrm{D}$ 显然成立．（2）设$A\in \mathrm{D}_p$，则

$$|a_{ii}|\cdot|a_{jj}|>\sigma_i\sigma_j\ (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)\tag{1}$$

于是存在i_0（$1\le i_0\le n$）使

1°　$|a_{jj}|>\sigma_j\ (j\neq i_0)$，$2^\circ$　$|a_{i_0i_0}|\cdot|a_{jj}|>\sigma_{i_0}\sigma_j\ (j\neq i_0)(j=1,2,3,\cdots,n)$．

事实上由（1）知2°成立．如果1°不成立，则存在$r,s(1\le r<s\le n)$，使$|a_{rr}|\le\sigma_r$，$|a_{ss}|\le\sigma_s$，从而有$|a_{rr}||a_{ss}|\le\sigma_r\sigma_s$这与（1）矛盾．故$1^\circ$、$2^\circ$成立．不妨设$i_0=1$，即

$$|a_{jj}|>\sigma_j,\ 且|a_{11}|\cdot|a_{jj}|>\sigma_1\sigma_j\ (j=2,3,\cdots,n)\tag{2}$$

如果$|a_{11}|>\sigma_1$，则$A\in \mathrm{D}$，取Q为单位阵则$Q^{-1}AQ=A\in \mathrm{D}$，于是有$A\in \mathrm{D}'$．如果$|a_{11}|\le\sigma_1$，取$q_1=\dfrac{\sigma_1}{|a_{11}|}\ge 1$，则对$2\le j\le n$有

$$|a_{11}|(\sigma_j+(q_1-1)|a_{j1}|)=\sigma_1\sigma_j-(\sigma_1-|a_{11}|)(\sigma_j-|a_{j1}|)\le\sigma_1\sigma_j<|a_{11}|\cdot|a_{jj}|,$$

而由（2）知$|a_{11}|>0$，所以

$$\sigma_j+(q_1-1)|a_{j1}|<|a_{jj}|\ (j=2,3,\cdots,n).\tag{3}$$

因$\sigma_1\ge|a_{11}|>0$，故必存在$k_0(2\le k_0\le n)$使$|a_{1k_0}|\neq 0$，再由（3）可取q_{k_0}满足

$$\frac{\sigma_{k_0}+(q_1-1)|a_{k_01}|}{|a_{k_0k_0}|}<q_{k_0}<1.\tag{4}$$

* 1986年1月20日收到．

令$Q=\mathrm{diag}(q_1,1,\cdots,1,q_{k_0},1,\cdots,1)$ 及$A^{(1)}=Q^{-1}AQ=(a_{ij}^{(1)})$，则 $a_{ii}^{(1)}=a_{ii}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且由 $|a_{1k_0}|\neq 0$及（3）、（4）有

$$\sigma_1^{(1)}=\sum_{j=2}^{n}|a_{1j}^{(1)}|=\frac{1}{q_1}[\sigma_1+(q_{k_0}-1)|a_{1k_0}|]<\frac{\sigma_1}{q_1}=|a_{11}|=|a_{11}^{(1)}|,$$

$$\sigma_{k_0}^{(1)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_0}}^{n}|a_{k_0j}^{(1)}|=\frac{1}{q_{k_0}}[\sigma_{k_0}+(q_1-1)|a_{k_01}|]<|a_{k_0k_0}|=|a_{k_0k_0}^{(1)}|,$$

$$\sigma_r^{(1)}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n}|a_{rj}^{(1)}|=\sigma_r+(q_1-1)|a_{r1}|+(q_{k_0}-1)|a_{rk_0}|$$

$$\leqslant\sigma_r+(q_1-1)|a_{r1}|<|a_{rr}^{(1)}|\ (r\neq 1,r\neq k_0,\ k=1),$$

上述不等式表示$A^{(1)}=Q^{-1}AQ\in\mathrm{D}$，故$A\in\mathrm{D}'$．综上知当$A\in\mathrm{D}_p$时必有$A\in\mathrm{D}'$，故$\mathrm{D}_p\subseteq\mathrm{D}'$．又

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0.1&1&0.5\\0.1&0.5&1\end{pmatrix}\in\mathrm{D}_p$$

而取$Q=\mathrm{diag}(3,1,1)$ 时，有$Q^{-1}BQ\in\mathrm{D}$，从而$B\in\mathrm{D}'$，故$\mathrm{D}'\neq\mathrm{D}_p$，所以$\mathrm{D}'\supset\mathrm{D}_p$．

（3）显然$\mathrm{D}'\subseteq\mathrm{D}'_p$．现设$A\in\mathrm{D}'_p$，则存在非奇对角阵$Q_1$使$Q_1^{-1}AQ_1\in\mathrm{D}_p$，而已证$\mathrm{D}_p\subset\mathrm{D}'$，故$Q_1^{-1}AQ_1\in\mathrm{D}'$，于是又存在非奇对角阵$Q_2$使$Q_2^{-1}Q_1^{-1}AQ_1Q_2\in\mathrm{D}$，取$Q=Q_1Q_2$，则$Q$为非奇对角阵，$Q^{-1}AQ\in\mathrm{D}$，所以$A\in\mathrm{D}'$，故有$\mathrm{D}'_p\subseteq\mathrm{D}'$，所以$\mathrm{D}'_p=\mathrm{D}'$．证毕．

定理2 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为复矩阵，$A\in\mathrm{D}'_p$（即$A\in\mathrm{D}'$）.如果$a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$中有p个正实数，q个负实数且$p+q=n$．则A的全部特征值中恰有p个实部为正，恰有q个实部为负．

证明 由$A\in\mathrm{D}'(=\mathrm{D}'_p)$知存在非奇异对角阵$Q$使$Q^{-1}AQ\in\mathrm{D}$．令$B=Q^{-1}AQ$，则$A$与$B$相似 并且$A$与$B$有相同的对角元，而$B\in\mathrm{D}$，故由〔2〕中定理1知结论成立．

定理2显然包含了〔1〕中的定理1，〔1〕中其它结论都不难推广到$A\in\mathrm{D}'(=\mathrm{D}'_p)$的情形，为省篇幅，不再一一叙述，进一步的讨论见〔3〕．

参 考 文 献

〔1〕杨载朴，数学研究与评论，4(1985)；pp.21—24．
〔2〕佟文廷，数学学报，20：4(1977)，pp.272—275．
〔3〕张垚，广义对角乘积占优阵的判定及应用，1985年中南地区计算数学与计算机应用学术交流会交流论文．

Also on the Distribution of the Eigenvalues on Generalized Diagonal Dominance Matrix

Zhang Yao

Abstract

In this paper, a mistake in 〔1〕 is corrected and the conclusion in 〔1〕 is improved.