矩阵正定性的进一步推广*

夏长富

（河南省周口师专）

§1 引言

在历史上，正定矩阵的出现最先是在二次型与Hermite型的研究中．它的常规定义是（为简便起见，本文恒用R表示实数域；$R^{n\times 1}$表示数域R上所有$n\times 1$矩阵的集合；$R^{n\times n}$表示数域R上所有$n\times n$矩阵的集合；X^T表示矩阵X的转置）：

定义1 n阶实对称方阵S称为正定的，如果对于任何$O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^{n\times 1}$都有$X^TSX>O$．（例如见〔1．P404〕）．记

$$S^+=\{S\in R^{n\times n}\mid S=S^T,\ \forall O\neq X\in R^{n\times 1},\ X^TSX>O\}.$$

矩阵的这种常规的正定性，只限于实对称矩阵使用．虽然人们在对正定矩阵理论的研究中，得出了非常丰富的结果，并且这种理论在几何学、物理学以及概率论等学科中都得到了重要的应用，但随着数学本身以及应用矩阵的其它学科的需要，有不少人开始研究未必对称的较为广义的正定矩阵．1970年，C．R．Johnson在〔2〕中提出了这种较为广义的定义．其定义如下：

定义2 设$A\in R^{n\times n}$，如果对任何$O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^{n\times 1}$，都有$X^TAX>O$，则称$A$为正定矩阵．记这种正定矩阵的全体为$P_1$．

这种较为广义的正定矩阵的理论在数学规划的最优算法中，在严格凸向量函数的检验中以及在各种线性回归模型结构的基本理论中都得到了应用．1984年，佟文廷在〔3〕中把这种正定矩阵作了推广：

定义3 设$A\in R^{n\times n}$，若对任何$O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^{n\times 1}$都有正对角矩阵$D=D_X>0$，使$X^TDAX>0$，则称$A$为广义的正定矩阵．记这种广义的正定矩阵的集合为$P_{\tilde{D}}$．

〔3〕中给出了这种广义正定矩阵类的各种等价描述，由此得出了一系列结果，并且指出了它们与稳定矩阵等的联系以及在稳定矩阵研究中的应用．这对矩阵论的理论与应用都是大有益处的．

本文的主要目的是对这种矩阵的正定性质作进一步的推广，由此得出更为广泛的结果，同时顺便指出〔3〕中的一个逻辑错误．为此引入如下定义：

定义4 设$A\in R^{n\times n}$，若对任何$O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^T\in R^{n\times 1}$，都存在$S=S_X\in S^+$，使得$X^TSAX>0$，则称$A$为广义正定矩阵．本文把这种广义正定矩阵的集合记为$P_{\tilde{S}}$．特别，若

* 1985年4月10日收到．

$S=S_X$ 与 X 无关时，这样的广义正定矩阵的集合记为 $\mathrm{P_S}$．

由定义3及定义4，显然有 $\mathrm{P}_{\tilde{D}}$ $\mathrm{P}_{\tilde{S}}$，且 $\mathrm{P_S}\subseteq\mathrm{P}_{\tilde{S}}$．

下面所指的正定矩阵，若无特别说明，均指定义1中 S^+ 中的元素，而所指的广义正定矩阵，在无特别申明的情况下，均指定义4中所定义的广义正定矩阵．

§2 主要结论与证明

定理1 设 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$，则 $A\in P_S$ 的必要且充分条件是，存在 $S\in\mathrm{S}^+$ 使 $SA+A^{\mathrm{T}}S\in\mathrm{S}^+$．

证明 必要性：设 $A\in\mathrm{P_S}$．由定义4知存在 $S\in\mathrm{S}^+$，使对任何 $O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times1}$ 都有 $X^{\mathrm{T}}SAX>O$，而因

$$X^{\mathrm{T}}(SA+A^{\mathrm{T}}S)X=2X^{\mathrm{T}}SAX \tag{1}$$

所以对任何 $O\neq X\in\mathrm{R}^{n\times1}$ 都有 $X^{\mathrm{T}}(SA+A^{\mathrm{T}}S)X>O$．注意到 $(SA+A^{\mathrm{T}}S)^T=SA+A^{\mathrm{T}}S$，便知 $SA+A^{\mathrm{T}}S\in\mathrm{S}^+$．

充分性：设存在 $S\in\mathrm{S}^+$ 使 $SA+A^{\mathrm{T}}S\in\mathrm{S}^+$．由（1）可得，对任何 $O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times1}$，都有

$$X^{\mathrm{T}}SAX=\frac{1}{2}X^{\mathrm{T}}(SA+A^{\mathrm{T}}S)X>O.$$

所以 $A\in\mathrm{P_S}$．定理1证毕．

对于任意给定的 $S\in\mathrm{S}^+$，记

$$\mathrm{P}_S=\{A\in\mathrm{R}^{n\times n}\mid\forall O\neq X\in\mathrm{R}^{n\times1},\ X^{\mathrm{T}}SAX>0\}.$$

则有如下

定理2 设 $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$，则下述各点是相互等价的：

（1）$A\in\mathrm{P}_S$；（2）$S_1A\in\mathrm{P}_{SS_1^{-1}}$，其中 S_1 与 S 可交换，并且 $S_1\in\mathrm{S}^+$；（3）$SA\in\mathrm{P_I}$；（4）$A^{\mathrm{T}}S\in\mathrm{P_I}$；（5）$S^{-1}A^{\mathrm{T}}\in\mathrm{P_I}$；（6）$AS^{-1}\in\mathrm{P_I}$；（7）$A^{\mathrm{T}}\in\mathrm{P}_{S^{-1}}$；（8）$AS_2\in\mathrm{P}_{S_2S}$，其中 $S_2\in\mathrm{S}^+$ 且 S_2 与 S 可交换；（9）$S_1AS_2\in\mathrm{P}_{S_2SS_1^{-1}}$，其中 S_1，S_2，S 两两可交换，且 S_1，$S_2\in\mathrm{S}^+$；（10）对 A 的任意主子矩阵 A_1，都有 S 的相应的主子矩阵 S'，使 $A_1\in\mathrm{P}_{S'}$．

为了说明定理2中的符号 $\mathrm{P}_{SS_1^{-1}}$，P_{S_2S} 以及 $\mathrm{P}_{S_2SS_1^{-1}}$ 有意义，首先注意两个基本事实：

（a）对于 A，$B\in\mathrm{R}^{n\times n}$，若 B 可逆且 A 与 B 可交换，则 A 与 B^{-1} 可交换；

（b）若 $A\in\mathrm{S}^+$，$B\in\mathrm{S}^+$ 且 A 与 B 可交换，则 $AB\in\mathrm{S}^+$．

这样，因为 S_1、S_2、S 两两可交换，所以 S_1^{-1}、S_2、S 两两可交换、而又因为 $S_1\in\mathrm{S}^+$，所以 $S_1^{-1}\in\mathrm{S}^+$，从而可知 SS_1^{-1}，S_2S，$S_2SS_1^{-1}\in\mathrm{S}^+$．故符号 $\mathrm{P}_{SS_1^{-1}}$、P_{S_2S} 及 $P_{S_2SS_1^{-1}}$ 有意义、下面来证明定理2．

证明 对于（1）——（7）的等价性，我们采用循环证明的方法、假设（1）成立．因为对任何 $O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times1}$，有 $X^{\mathrm{T}}SAX>O$，所以

$$X^{\mathrm{T}}(SS_1^{-1})(S_1A)X=X^{\mathrm{T}}SA>O.$$

即（2）成立．

假设（2）成立．取 $S_1=S$（这是可行的），则有 $SA\in\mathrm{P_I}$，即（3）成立．

假设（3）成立．因为对任何 $O\neq X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n\times1}$，都有 $X^{\mathrm{T}}SAX>O$，所以

$$X^{T}A^{T}SX=(X^{T}SAX)^{T}>O.$$

即（4）成立.

假设（4）成立. 因为

$$X^{T}A^{T}SX=X^{T}SS^{-1}A^{T}SX=(SX)^{T}S^{-1}A^{T}(SX)=Y^{T}S^{-1}A^{T}Y,$$

其中$Y=SX$，而对任何$O\neq Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，都有$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，于是

$$Y^{T}S^{-1}A^{T}Y=X^{T}A^{T}SX>O$$

所以（5）成立.

假设（5）成立. 由$X^{T}AS^{-1}X=X^{T}S^{-1}A^{T}X$，立即（6）成立.

假设（6）成立. 由$X^{T}S^{-1}A^{T}X=X^{T}AS^{-1}X$，即知（7）成立.

假设（7）成立. 因为

$$X^{T}SAX=(SX)^{T}S^{-1}A^{T}(SX)=Y^{T}S^{-1}AY,$$

其中$Y=SX$. 而对任何$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，都有$O\neq Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，于是$X^{T}SAX=Y^{T}S^{-1}A^{T}Y>0$，所以（1）成立.

（1）与（8）的等价性证明如下：

假设（1）成立. 因为

$$X^{T}(S_2S)(AS_2)X=(S_2X)^{T}SA(S_2X)=Y^{T}SAY \tag{Ⅱ}$$

其中$Y=S_2X$. 而对任何$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，都有$O\neq Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，所以

$$X^{T}(S_2S)(AS_2)X=Y^{T}SAY>O$$

即（8）成立.

假设（8）成立. 根据（Ⅱ），因对任何$O\neq Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，都有$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，所以

$$Y^{T}SAY=X^{T}(S_2S)(AS_2)X>O.$$

即（1）成立.

再证（1）与（9）等价. 假设（1）成立. 因

$$X^{T}(S_2SS_1^{-1})(S_1AS_2)X=(S_2X)^{T}SA(S_2X)=Y^{T}SAY,$$

其中$Y=S_2X$，而对任何$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$，都有$O\neq Y\in\mathbf{R}^{n\times 1}$. 反之亦然，从而可知（9）成立. 由此又可知若（9）成立，则（1）也成立.

最后来证明（1）与（10）等价.

若（10）成立，则（1）成立是显然的. 这是因为A即是A的n阶主子矩阵，而S的相应的n阶主子矩阵即为S本身.

若（1）成立. 设A_1为A的任一个主子矩阵. $A_1=A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ i_1 i_2 \cdots i_r \end{pmatrix}$. 则$S$的相应的主子矩阵为$S^1=S\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ i_1 i_2 \cdots i_r \end{pmatrix}$. $\forall O\neq Y=(y_1,\cdots,y_r)^{T}\in\mathbf{R}^{r\times 1}$，取$X=(x_1,\cdots,x_n)^{T}$，其中$x_{i_j}=y_j$，$j=1,2,\cdots,r$，而其余元素全为0. 则$O\neq X\in\mathbf{R}^{n\times 1}$且

$$Y^{T}S'A_1Y=X^{T}SAX>O.$$

所以$A_1\in\mathbf{P}_{S'}$，即（10）成立.

这就证明了（1）—（10）是相互等价的.

定理3 $\quad \mathbf{S}^{+}\subset\mathbf{P}_{I}\subset\mathbf{P}_{S}\subseteq\mathbf{P}_{\tilde{S}}$.

证明 $S^+\subset P_I$ 的正确性参见〔3〕中命题2即明．而显然有 $P_I\subseteq P_S\subseteq P_{\bar{S}}$．所以只需证明 $P_I\neq P_S$ 即可．取

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}\qquad S=\begin{pmatrix}6&1\\1&2\end{pmatrix}\oplus I_{n-2}.$$

（I_{n-2}为 $n-2$阶单位矩阵）．则对任何$O\neq X\in R^{n\times1}$其中$X=(x_1,\cdots,x_n)^T$，都有

$$X^TSAX=(3x_1+\frac{17}{6}x_2)^2+\frac{35}{36}x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2>O$$

因$S\in S^+$，所以$A\in P_S$．但是

$$X^TAX=(x_1+2x_2)^2+x_3^2+\cdots+x_n^2.$$

当$x_1+2x_2=0$，x_1,x_2不全为0，而$x_3=\cdots=x_n=0$时，$X^TAX=O$．所以$A\bar{\in}P_I$．于是就有 $P_I\neq P_S$．定理3 证毕．

定理4 如果$A\in P_S$，则$\det A>O$．

证明 因为$A\in P_S$，故存在$S\in S^+$，使对任何$O\neq X\in R^{n\times1}$，都有

$$X^TSAX>O.$$

令

$$S_1=\frac{SA+A^TS}{2};\qquad K_1=\frac{SA-A^TS}{2}.$$

则$SA=S_1+K_1$且$S_1^T=S_1$，$K_1^T=-K_1$．由定理1 易知$S_1\in S^+$，从而存在可逆方阵$P\in R^{n\times n}$,使$S_1=PP^T$．而$K_1=PP^{-1}K_1(P^{-1})^TP^T=PK_2P^T$，其中$K_2=P^{-1}K_1(P^{-1})^T$，且有$K_2^T=-K_2$．那么就有$n$阶正交矩阵$O\in R^{n\times n}$，使

$$K_2=O\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&a_1\\-a_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a_2\\-a_2&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&a_r\\-a_r&0\end{pmatrix}0\cdots0\right)O^T$$

其中$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_r>O$，$\operatorname{rank}\ K_2=2r$． 令

$$Q=PO,\ D=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0&a_1\\-a_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a_2\\-a_2&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&a_r\\-a_r&0\end{pmatrix}0\cdots0\right).$$

则

$$S_1=Q\ Q^T,\ K_1=QDQ^T.$$

从而

$$SA=S_1+K_1=Q\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}1&a_1\\-a_1&1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1&a_1\\-a_r&1\end{pmatrix}1\cdots1\right)Q^T.$$

于是

$$\det S\ \det A=(\det Q)^2(1+a_1)^2\cdots(1+a_r)^2>O$$

而又因$S\in S^+$，所以$\det A>O$．证毕．

推论 如果$A\in P_S$，则A的所有主子式全为正．

证明 设A_1为A的任一个r阶主子矩阵．因为$A\in P_S$，则存在某个$S\in S^+$，使对于任何$O\neq X\in R^{n\times1}$都有$X^TSAX>O$．即$A\in P_S$．由定理2的（1）和（10）知，存在S的相应的主子矩阵S^1使$A_1\in P_{S^1}$记

$$P_{S_r}=\{B\in R^{r\times r}\mid\forall O\neq X\in R^{r\times1}\text{都有}r\text{阶正定矩阵}S\text{使}X^TSBX>O\}.$$

则$A_1 \in P_{S_1'}$．从而根据定理4即知$\det A_1 > 0$．

§3 〔3〕的一个错误

首先把〔3〕中的一段文字抄录如下：

"定义2　设$A \in R^{n\times n}$，若对任何$O \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^{n\times 1}$，都有正对角矩阵$D = D_X > 0$，使$X^T DAX > 0$，则称$A$为广义正定矩阵，记为$A \in P_{\tilde{D}}$．若$D = D_X$与$X$无关，则记为$A \in P_D$"．

依此定义，集合P_D应作如下理解：在这个定义中，D_X不仅与X有关，而且与A也有关．从而若$D = D_X$与X无关，那么可能$D = D_X$与A仍有关．即是说，对于不同的A，$B \in P_D$，任何$O \neq X \in R^{n\times 1}$，总存在正对角矩阵$D_1 > 0$，$D_2 > 0$使$X^T D_1 AX > 0$，$X^T D_2 BX > 0$．但可能有$D_1 \neq D_2$．

按照这种理解，来看〔3〕中的

"定理4　（i）P_D关于矩阵加法成一半群，但不成群．而$P_{\tilde{D}}$对矩阵加法并不封闭，因此，$P_D \neq P_{\tilde{D}}$；

（ii）P_D，$P_{\tilde{D}}$关于矩阵乘法都不是封闭的．

"证　设$A \in P_D$，$B \in P_D$，则对任何$O \neq X \in R^{n\times 1}$，都有$X^T DAX > 0$，$X^T DBX > 0$，因此
$$X^T D(A+B)X = X^T DAX + X^T DBX > O,$$
即$A + B \in P_D$．…"．

在这个证明过程中，对任意的A，$B \in P_D$，〔3〕误认为一定存在同一个正对角矩阵$D > 0$，使$X^T DAX > 0$，$X^T DBX > 0$成立．这与集合P_D的规定不合，所以这个证明是错误的．

又如〔3〕中的

"定理1　$A \in P_D \Leftrightarrow DA + A^T D \in P_S$"．这里的$D$含义不清．

也许〔3〕的作者对集合P_D采用另一种理解，即假设D是一个固定的正对角矩阵，亦即在〔3〕的定义2中认为D是与X无关，与A也无关的一个正对角矩阵．在这种理解下，〔3〕的定理4虽然可以成立，但是〔3〕的命题2的证明却是错误的．来看〔3〕中的．

"命题2　$P_S \subset P_I \subset P_D \subseteq P_{\tilde{D}}$．其中$P_I$表示定义1中的正定矩阵集合，$P_S$表示通常的正定对称矩阵集合．

"证　…取$D = I_n$，知$P_I \subseteq P_D$．再取
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \oplus I_{n-2}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-2},$$
则知对任何$O \neq X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in R^{n\times 1}$，都有
$$X^T DAX = (\frac{5}{4}x_1 + 2x_2)^2 + \frac{7}{16}x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 > 0.$$
因此$A \in P_D$．但当$x_1 + 2x_2 = 0$，x_1，x_2不全为0，而$x_3 = \cdots = x_n = 0$时，
$$X^T AX = (x_1 + 2x_2)^2 = 0,$$
由此知$A \notin P_I$．故$P_I \subset P_D$"．

在上面证明$P_I \subseteq P_D$过程中，〔3〕取了$D = I_n$，又在证明$P_I \neq P_D$时，取了$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus$

$I_{n\ 2}$. 这与P_D的第二种理解是不相符合的. 所以, 在后一种理解下,〔3〕的命题2的证明是错误的. 此外, 在后一种理解下, 容易验证〔3〕的定理2中的（1）与（10）等价是错误的.

按照常规, 在一篇文章里, 一个集合符号应表示一个确定的集合, 不应有几种不同的含义. 再退一步来说, 假设〔3〕中在不同的场合对P_D赋于不同的含义, 那么来看〔3〕中的

"定理5　　$P_S \subset P_I \subset P_D \subset P_{\tilde{D}} \subset -S$".

不知这里的P_D应作何解释, 才能使〔3〕中的定理4与命题2的证明都趋正确.

无疑,〔3〕对矩阵正定性的推广, 在某种意义上, 对矩阵论的理论与应用都起了一个很大的推进作用. 但在证明某些命题中出现了逻辑错误. 为了使矩阵正定性理论的研究继续深入, 本文指出这些错误是必要的.

参 考 文 献

〔1〕许以超, 代数学引论, 上海科学技术出版社, 1982.

〔2〕Johnson C. R., Positive definite matrices, Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 259—264.

〔3〕佟文廷, 广义正定矩阵, 数学学报, 27 (1984), 801—810.

〔4〕Fiedler M. and Ptak V., On matrices with non positive off diagonal, elements and positive prinicipal minors, Czech. Math. J., 12 (1962), 382—400.