广义容斥原理及其应用*

曹　汝　成

（华南师范大学，广州）

容斥原理（包含和排斥原理的简称，又称取舍原理或出入原理）是组合计数中的一个非常基本而重要的工具．Schwenk[1]和魏万迪[2]推广了容斥原理[1-3]．本文给出了容斥原理的一种新的拓广，得到了广义容斥原理．

定理1（有限形式广义二项式反演公式）设$n_1, n_2, \cdots, n_k$是给定的k个正整数，$a_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$和$b_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$（$0\leqslant t_i\leqslant n_i, i=1,2,\cdots,k$）是某一加群中的元．若对任意的$k$个非负整数$r_1, r_2, \cdots, r_k$（$r_i\leqslant n_i, i=1,2,\cdots,k$）．均有

$$a_{r_1,r_2,\cdots,r_k}=\sum_{\substack{r_i\le t_i\le n_i\\1\le i\le k}}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i}{r_i}b_{t_1,t_2,\cdots,t_k},\tag{1}$$

则对任意的$2k$个非负整数$m_1, m_2, \cdots, m_k, l_1, l_2, \cdots, l_k$（$m_i\leqslant l_i\leqslant n_i, i=1,2,\cdots,k$），必有

$$b_{m_1,m_2,\cdots,m_k}=\sum_{\substack{m_i\le t_i\le n_i\\1\le i<k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-m_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i}{m_i}a_{t_1,t_2,\cdots,t_k}\tag{2}$$

及

$$\sum_{\substack{m_i\le t_i\le l_i\\1\le i\le k}}b_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{s_i\le n_i\\s_i=m_i\text{或}l_i+1\\1\le i\le k}}\ \sum_{\substack{s_i\le t_i\le n_i\\1\le i\le k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-s_i-c_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{s_i-1}a_{t_1,t_2,\cdots,t_k}\tag{3}$$

在（3）式中，若$s_i=m_i$，则$c_i=0$；若$s_i=l_i+1$，则$c_i=1, i=1,2,\cdots,k$．

证明　设（1）式成立，则

$$\sum_{\substack{m_i\le t_i\le n_i\\1\le i\le k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-m_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i}{m_i}a_{t_1,t_2,\cdots,t_k}$$

$$=\sum_{\substack{m_i\le t_i\le n_i\\1\le i<k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-m_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i}{m_i}\Big[\sum_{\substack{t_j\le s_j\le n_j\\1\le j\le k}}\prod_{j=1}^{k}\binom{s_j}{t_j}b_{s_1,s_2,\cdots,s_k}\Big]$$

$$=\sum_{\substack{m_i\le s_i\le n_i\\1\le i\le k}}\prod_{i=1}^{k}\Big[\sum_{m_i\le t_i\le s_i}(-1)^{t_i-m_i}\binom{s_i}{t_i}\binom{t_i}{m_i}\Big]b_{s_1,s_2,\cdots,s_k},\tag{4}$$

由熟知的组合恒等式：

* 1985年10月18日收到．1987年5月15日收到修改稿．

$$\sum_{m\le t\le s}(-1)^{t-m}\binom{s}{t}\binom{t}{m}=\begin{cases}1, & s=m;\\ 0, & s\ne m.\end{cases} \tag{5}$$

即知（4）式右边为$b_{m_1,m_2,\cdots,m_k}$，故（2）式成立.

下面用数学归纳法证明（3）式.

当$k=1$时，由（2）式有

$$\begin{aligned}\sum_{m\le t\le l}b_t&=\sum_{m\le t\le n}b_t-\sum_{l+1\le t\le n}b_t\\&=\sum_{m\le t\le n}\sum_{t\le s\le n}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}a_s-\sum_{l+1\le t\le n}\sum_{t\le s\le n}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}a_s\\&=\sum_{m\le s\le n}a_s\sum_{m\le t\le s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}-\sum_{l+1\le s\le n}a_s\sum_{l+1\le t\le s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}\end{aligned} \tag{6}$$

由组合恒等式

$$\sum_{m\le t\le s}(-1)^{s-t}\binom{s}{t}=(-1)^{s-m}\binom{s-1}{m-1}, \tag{7}$$

得

$$\sum_{m\le t\le l}b_t=\sum_{m\le s\le n}(-1)^{s-m}\binom{s-1}{m-1}a_s-\sum_{l+1\le s\le n}(-1)^{s-l-1}\binom{s-1}{l}a_s.$$

即当$k=1$时，（3）式成立.

假设$k=r$时（3）式成立，则当$k=r+1$时（3）式亦成立是非常明显的，故由数学归纳法，对一切自然数k，（3）式恒成立．证毕.

设A是一个非空有限集，集中每个元a都赋有权$\omega(a)$（属于某一加群）．再设P是m个性质之集，$\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{P}_i=\mathrm{P}$是P的一个分划，$|\mathrm{P}_i|=m_i$（$1\le i\le k$）．对任意给定的$2k$个非负整数$r_1,r_2,\cdots,r_k,l_1,l_2,\cdots,l_k$（$r_i\le l_i\le m_i$，$i=1,2,\cdots,k$），以$\mathrm{W}\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}$表示A中至少具有$\mathrm{P}_i$（$i=1,2,\cdots,k$）中的$r_i$个性质，但至多具有$\mathrm{P}_i$中$l_i$个性质的所有元的权和．当$r_i=l_i$（$i=1,2,\cdots,k$）时，把$\mathrm{W}\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}$简记为$\mathrm{W}(r_1,r_2,\cdots,r_k)$，即$\mathrm{W}(r_1,r_2,\cdots,r_k)$表示A中恰具有$\mathrm{P}_i$（$i=1,2,\cdots,k$）中的$r_i$个性质的所有元的权和，于是

$$\mathrm{W}\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}=\sum_{\substack{r_i\le t_i\le l_i\\1\le i\le k}}\mathrm{W}(t_1,t_2,\cdots,t_k). \tag{8}$$

又设B_i（$i=1,2,\cdots,k$）是P_i的子集，以$\mathrm{W}(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2\cdots,\mathrm{B}_k)$表示A中具有$\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{B}_i$所含性质的所有元的权和，并令

$$\mathrm{W}_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{\mathrm{B}_i\subset\mathrm{P}_i\\|\mathrm{B}_i|=t_i\\1\le i\le k}}\mathrm{W}(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\cdots,\mathrm{B}_k). \tag{9}$$

显然，

$$\mathrm{W}_{r_1,r_2,\cdots,r_k}=\sum_{\substack{r_i\le t_i\le m_i\\1\le i\le k}}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i}{r_i}\mathrm{W}(t_1,t_2,\cdots,t_k), \tag{10}$$

于是根据定理1，由（8）和（10）式即得

定理 2 (广义容斥原理)

$$W\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}=\sum_{\substack{s_i\leq m_i\\ s_i=r_i\text{或}l_i+1\\ 1\leq i\leq k}}\ \sum_{\substack{s_i\leq t_i\leq m_i\\ 1\leq i\leq k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-s_i-c_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{s_i-1}W_{t_1,t_2,\cdots,t_k}. \quad (11)$$

其中，若$s_i=r_i$，则$c_i=0$；若$s_i=l_i+1$，则$c_i=1$，$i=1,2,\cdots,k$.

在定理 2 中，令$l_i=r_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，即得文献[2]中的广义容斥原理.当然，可由(2)及(10)式立即得到广义容斥原理.且这种证明方法比文献[3]的两种证明方法均要简便得多.

下面应用广义容斥原理解决一些组合计数问题.

问题 1．设有n种共N个球，其中第i种$(i=1,2,\cdots,n)$有N_i个均不可辨的球。又有k组共m个均可辨的盒子,其中第$j\ (j=1,2,\cdots,k)$组盒子的个数为m_j。把N个球分放到m个盒子中去,使第j组盒子至少有r_j个空而至多有l_j个空$(r_j\leqslant l_j\leqslant m_j)$，求此种分放方法的个数.

记此种分放方法的个数为$Q\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}$，并以$\mathbf{A}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$表示第$i$组盒子所成之集．设$\mathbf{B}_i\subset\mathbf{A}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，以$Q(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_k)$表示$\bigcup_{i=1}^{k}\mathbf{B}_i$中的盒子均空的分放方法的个数，并令

$$Q_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{\mathbf{B}_i\subset\mathbf{A}_i\\ |\mathbf{B}_i|=t_i\\ 1\leq i\leq k}}Q(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_k),$$

易知

$$Q_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\prod_{i=1}^{k}\binom{m_i}{t_i}\prod_{j=1}^{n}\binom{m-\sum_{1\leq i\leq k}t_i+N_j-1}{N_j},$$

于是由广义容斥原理得

定理 3

$$Q\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}=\sum_{\substack{s_i\leq m_i\\ s_i=r_i\text{或}l_i+1\\ 1\leq i\leq k}}\ \sum_{\substack{s_i\leq t_i\leq m_i\\ 1\leq i\leq k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-s_i-c_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{s_i-1}\binom{m_i}{t_i}\prod_{j=1}^{n}\binom{m-\sum_{1\leq i\leq k}t_i+N_j-1}{N_j}.$$

其中，若$s_i=r_i$，则$c_i=0$；若$s_i=l_i+1$，则$c_i=1$，$i=1,2,\cdots,k$.

问题 2　设$\{P_{ij}\}_{1\leq j\leq m_i}(1\leqslant i\leqslant k)$是$k$组共$m=m_1+m_2+\cdots+m_k$个不同的素数．求集$N=\{1,2,\cdots,n\}$中至少被第$i$组中$r_i$个素数整除，而至多被第$i$组中的$l_i\ (r_i\leqslant l_i\leqslant m_i,\ i=1,2,\cdots,k)$个素数整除的正整数的个数.

记所求的个数为$M\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}$，并记$\mathbf{A}_i=\{P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{im_i}\},1\leqslant i\leqslant k$．设$\mathbf{B}_i\subset\mathbf{A}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，以$M(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_k)$表示集$N$中被$\bigcup_{i=1}^{k}\mathbf{B}_i$所含的素数整除的个数，并记

$$M_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{\mathbf{B}_i\subset\mathbf{A}_i\\ |\mathbf{B}_i|=t_i\\ 1\leq i\leq k}}M(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_k),$$

易知

$$M_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{a_{ij}=0\text{或}1\\ \sum\limits_{1\le j\le m_i}a_{ij}=t_i\\ 1\le i\le k}}\left[\frac{n}{\prod\limits_{1\le i\le k}\prod\limits_{1\le j\le m_i}p_{ij}^{a_{ij}}}\right],$$

其中$[x]$表示不大于x的最大整数。于是由广义容斥原理得

定理 4

$$M\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}=\sum_{\substack{s_i\le m_i\\ s_i=r_i\text{或}l_i+1\\ 1\le i\le k}}\sum_{\substack{s_i\le t_i\le m_i\\ 1\le i\le k}}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i-s_i-c_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{s_i-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{a_{ij}=0\text{或}1\\ \sum\limits_{1\le j\le m_i}a_{ij}=t_i\\ 1\le i\le k}}\left[\frac{n}{\prod\limits_{1\le i\le k}\prod\limits_{1\le j\le m_i}p_{ij}^{a_{ij}}}\right].$$

其中，若$s_i=r_i$，则$c_i=0$；若$s_i=l_i+1$，则$c_i=1$，$i=1,2,\cdots,k$.

问题 3 （ménage 问题的拓广） 设有m对夫妻，分成k组，其中第i（$1\leqslant i\leqslant k$）组有m_i对夫妻，今安排这m对夫妻围圆桌而坐，使得男女相间且第i组的m_i对夫妻中至少有r_i对相邻而坐，而至多有l_i对相邻而坐（$r_i\leqslant l_i\leqslant m_i$，$i=1,2,\cdots,k$），求安排座位的方法数.

记此种安排座位的方法数为$G\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}$，以$\mathbf{A}_i$（$i=1,2,\cdots,k$）表示第$i$组夫妻之集.设$\mathbf{B}(t_i)$是$\mathbf{A}_i$中某$t_i$（$t_i\leqslant m_i$，$i=1,2,\cdots,k$）对夫妻所成之集，以$G(\mathbf{B}(t_1),\mathbf{B}(t_2),\cdots,\mathbf{B}(t_k))$表示这$m$对夫妻男女相间，且$\bigcup\limits_{i=1}^{k}\mathbf{B}(t_i)$中的每一对夫妻均相邻而坐的座位安排方法数，并令

$$G_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\sum_{\substack{\mathbf{B}(t_i)\subset\mathbf{A}_i\\ 1\le i\le k}}G(\mathbf{B}(t_1),\mathbf{B}(t_2),\cdots,\mathbf{B}(t_k)).$$

今先求$G(\mathbf{B}(t_1),\mathbf{B}(t_2),\cdots,\mathbf{B}(t_k))$. 先设$\sum\limits_{i=1}^{k}t_i<m$，我们可按如下次序安排座位：从诸$\mathbf{B}(t_i)$外的男女中选定一男人，先安排他入座，然后安排诸$\mathbf{B}(t_i)$的共$\sum\limits_{i=1}^{k}t_i$对夫妻入座，最后安排其他男女入座. 因为男女必须相间而坐，当安排好选定的男人入座之后，安排诸$\mathbf{B}(t_i)$的共$\sum\limits_{i=1}^{k}t_i$对夫妻入座的方法数为

$$\binom{2m-\sum\limits_{i=1}^{k}t_i-1}{\sum\limits_{i=1}^{k}t_i}\left(\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!$$

安排其余的$(m-\sum\limits_{i=1}^{k}t_i-1)$个男人和$(m-\sum\limits_{i=1}^{k}t_i)$个女人入座的方法数为

$$\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1\right)!\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!.$$

从而

$$G(B(t_1),B(t_2),\cdots,B(t_k))=\binom{2m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1}{\sum_{i=1}^{k}t_i}\left(\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1\right)!\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!=\frac{2\left(2m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1\right)!\left[\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!\right]^2}{\left(2m-2\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!}.$$

显见，当$\sum_{i=1}^{k}t_i=m$时，上式仍然成立，于是

$$G_{t_1,t_2,\cdots,t_k}=\prod_{i=1}^{k}\binom{m_i}{t_i}\frac{2\left(2m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1\right)!\left[\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!\right]^2}{\left(2m-2\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!}.$$

由广义容斥原理得

定理 5
$$G\binom{r_1,r_2,\cdots,r_k}{l_1,l_2,\cdots,l_k}=\sum_{\substack{s_i\leq m_i\\ s_i=r_i\text{或}l_i+1\\ 1\leq i\leq k}}\ \sum_{\substack{s_i\leq t_i\leq m_i\\ 1\leq i\leq k}}(-1)^{\sum_{i=1}^{k}(t_i-s_i-c_i)}\prod_{i=1}^{k}\binom{t_i-1}{s_i-1}\binom{m_i}{t_i}\cdot\frac{2\left(2m-\sum_{i=1}^{k}t_i-1\right)!\left[\left(m-\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!\right]^2}{\left(2m-2\sum_{i=1}^{k}t_i\right)!}$$

其中，若$s_i=r_i$，则$c_i=0$；若$s_i=l_i+1$，则$c_i=1$，$i=1,2,\cdots,k$.

参 考 文 献

[1] Schwenk, A, J, Discrete Math, 18(1977) 1: 71—78.
[2] 魏万迪，科学通报，25(1980)，7:296—299.
[3] 柯召、魏万迪，组合论，科学出版社，1981，93—100.

A Generalized Principle of Inclusion—Exclusion and Its Applications

Cao Rucheng
(South China Normal University)

Abstract

In this article we generalize the principle of inclusion-exclusion. A generalized principle of inclusion exclusion is given. We also give its some applications.