1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

Hamilton图与其特定生成子图的关系*

陈 婵

（杭州师范学院）

连通是Hamilton图的一个必要条件，它是Hamilton图的一个通性．1968年在德国Mancbach召开的一次组合数学会议上，Sachs, Kozyrev 和Grinberg［1］提出了可平面图具有Hamilton圈的一个必要条件：$\sum_{i=2}^{n}(i-2)(f_i-f_i')=0$，其中$f_i, f_i'$分别是Hamilton圈内、外的$i$边形个数．这是可平面Hamilton图的一个通性．1972年多伦多一个数学工作者，用这个必要条件证明加拿大数学家W．T．Tutte构造的Tutte图是非Hamilton图［2］．这个必要条件，只限于可平面图．本文试图研究Hamilton图与其特定生成子图的关系，得到一般（可平面和非可平面）图的另一通性．有下面的定理．

定理 1 设G为一个连通单图，$V(G)=\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$，$\varepsilon(G)=m$，则图G为Hamilton图的充要条件是至少有一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图Q，且G－E（Q）是一个圈．

证明 由于一个图是Hamilton图当且仅当它的基础单图是Hamilton图，所以只需考虑单图就行［3］．

必要性 图G为Hamilton图，则至少有一个Hamilton圈C，G－E（C）就是顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图Q，因此至少有一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图Q．G－E（Q）就是Hamilton圈C，因此G－E（Q）是一个圈．

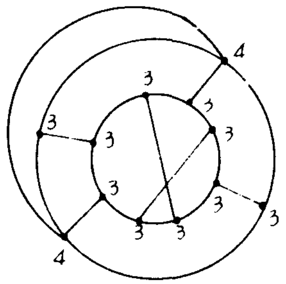


图 1

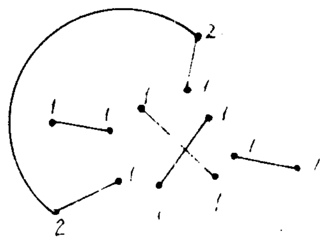


图 2

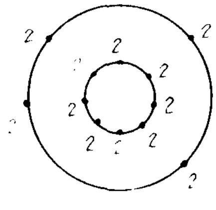


图 3

充分性 图G（见图1）有顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图Q（见图2）．$d_G(V_i)-d_Q(V_i)=2\ (i=1,2,\cdots,n)$．可见G－E（Q）（见图3）中每个顶点的度为2．由于有n个顶点，G－E（Q）就有$2n$度，G－E（Q）中有n个顶点，n条边，每一顶点的度为2，

* 1987年8月25日收到．杭州大学王兴华教授推荐

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

则G－E(Q)只可能是一个圈或两个以上不连通的圈．由于已知条件G－E(Q)是一个圈，而图G的n个顶点在G－E(Q)这个圈上，则G－E(Q)是图G的一个Hamilton圈，图G是Hamilton图．定理1证毕．

定理1充分性的证明中，G－E(Q)有n条边，而$\varepsilon(G)=m$，则$\varepsilon(Q)=\varepsilon(G)-\varepsilon[G-E(Q)]=m-n$．可得以下推论．

推论 设G为连通单图，$V(G)=\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$，$\varepsilon(G)=m$，则图G的顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图有$m-n$条边．

当图G找到一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图，就可判定它是否为Hamilton图．

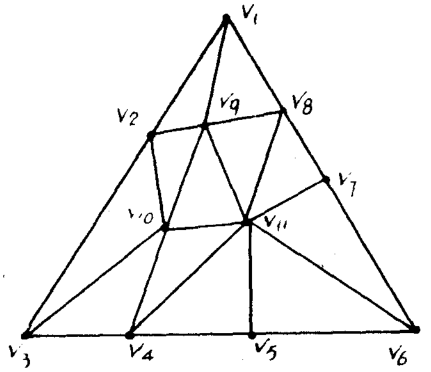
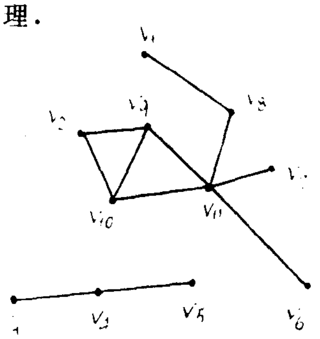


图4

图4，把每一顶点的度减去2，再根据各点的度与图4中边和顶点的关联与否作出生成子图Q_4，把度大的顶点之间尽量用边连结．当然要图4中两点之间有边的才连结，最后考虑度小的顶点．可找到顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图$Q_4$．且G－E($Q_4$)是一个圈$V_1V_2V_3V_{10}V_4V_{11}V_5V_6V_7V_8V_9V_1$．故图4是一个Hamilton图．

图5容易找到一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,10)$的生成子图Q5，G－E（Q5）是两个不连通的圈$V_1V_6V_7V_8V_1$和$V_2V_3V_5V_4V_9V_{10}V_2$，图5是否为Hamllton图。要看有无另外的顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,10)$的生成子图$Q^1$5，这样找这种生成子图，有下面的定理．


图Q1

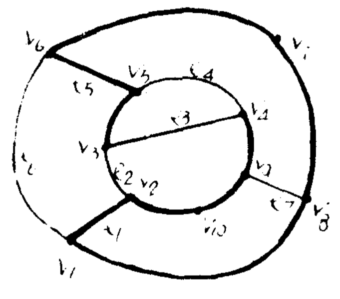
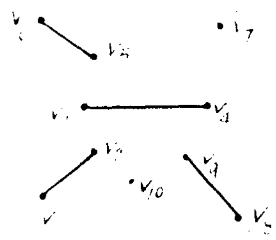


图5

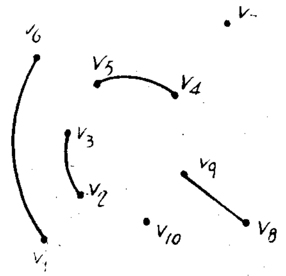

图Q5

定理2 假设图G有顶点的度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图Q，G－E(Q)是不连通的圈，图G有另一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图$Q^1$的充要条件是图G中有一个或二个以上无公共边的偶圈，且这种偶圈由Q的边和G－E(Q)的边相间组成．

证明 若G（见图5）有另一个顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,2,\cdots,n)$的生成子图$Q'$（见图$Q'$5），一定是生成子图Q（见图Q5）中的边和G－E(Q)中的边互相调换的结果．它是G－E(Q)中的一些边(e_2,e_4,e_6)到生成子图Q^1（见图$Q^1$5）上，而生成子图Q中的边(e_1,e_3,e_5)到G－E(Q^1)（图5中用粗黑线表示的）上，由推论知，图G的顶点度为$d_G(V_i)-2\ (i=1,$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

2, …, n）的生成子图的边数为$m-n$（$m=\varepsilon$(G)，$n=V$(G)），同一个图G的两个这种生成子图Q和Q^1的边数相等．因此G－E（Q）中有l（$l\leqslant m-n$）条边（e_2，e_4，e_6）到生成子图Q^1上，生成子图Q中一定有l（$l\leqslant m-n$）条边（e_1，e_3，e_5）到G－E（Q^1）上，而G－E（Q）和G－E（Q^1）都是顶点的度为2，因Q和Q^1只有l条边不同，即生成子图Q中的l条边去掉与G－E（Q）中的 l 条边去掉，各顶点的度相同，只当Q的 l 条边与G－E（Q）的 l 条边相间隔地组成一个圈（$V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_1$）或二个以上无公共边的圈才可能．因两种边相间地组成圈，每一圈一定有偶数条边．



图Q′5

反之，图G（见图5）有这种性质的偶圈（$V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_1$），这种圈是生成子图Q中的边（e_1，e_3，e_5）和G－E（Q）中的边（e_2，e_4，e_6）相间地组成．而把G－E（Q）中在这种偶圈上的边（e_2，e_4，e_6）去掉与生成子图Q中在这种偶图上的边（e_1，e_3，e_5）去掉，各顶点的度相同，因此可由G－E（Q）的在这种偶圈上的边与生成子图Q的不在这种偶圈上的边（e_7）作为图G的一个生成子图Q^1的边，Q^1就是图G的顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1, 2, \cdots, n$）的生成子图．定理2证毕．

由定理2，容易从已知的一个生成子图，找到另一个生成子图．图中去掉其中一个生成子图的边，是一个圈，就可判定是Hamilton图．

生成子图Q的边和G－E（Q）的边相间组成的偶圈，以下称相间偶圈．

Hamilton图的相间偶圈有它的特点，我们给出下面的定理．

定理3　设图G为Hamilton图，且有顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1, 2, \cdots, n$）的生成子图Q，G－E（Q）是不连通的圈，则图G中有一个或二个以上无公共边的相间偶圈，且相间偶圈如有边在G－E（Q）的 p 个圈上，此 p 个圈依次关联的桥仅有 p 条．

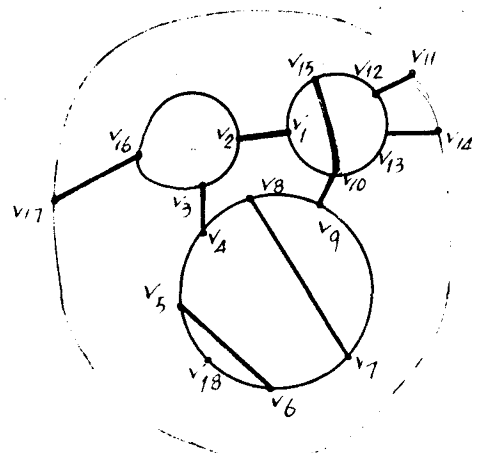
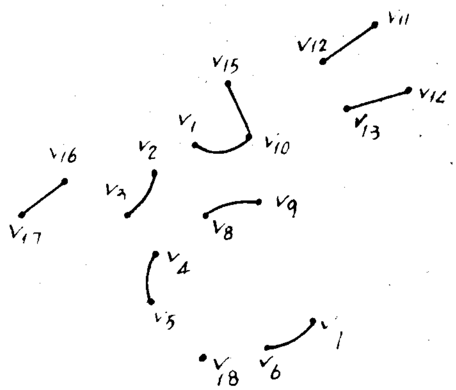


图6



图Q′6

证明　图G（见图6）有顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1, 2, \cdots, n$）的生成子图Q（图6中用粗黑线表示的为Q的边），G－E（Q）是不连通的圈．图G是Hamilton图，至少有一个Hamil

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

ton圈C，就有顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1,2,\cdots,n$）的生成子图Q^1（见图$Q^1 6$），$C=G-E(Q^1)$，由定理2，图G中有一个或二个以上无公共边的相间偶圈，若相间偶圈有边在$G-E(Q)$的p个圈上，这p个圈及p个圈的桥组成图G的一个子图（见图7），因图G有Hamilton圈，子图必

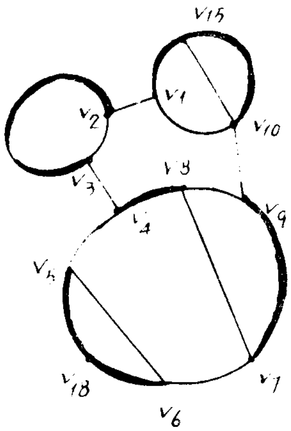


图7

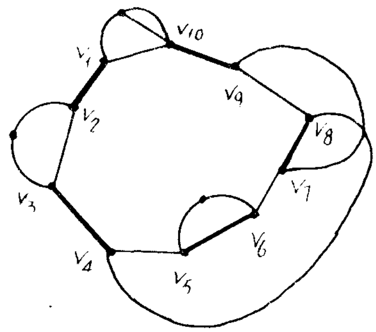
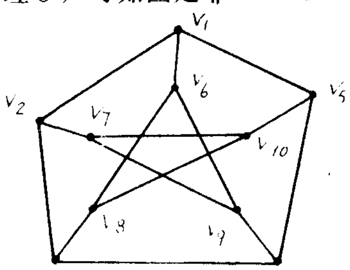


图8

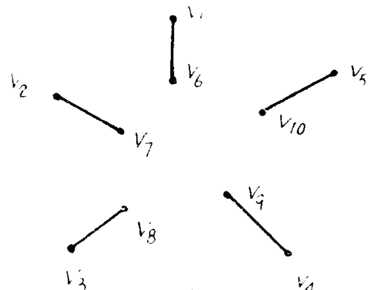
有Hemilton圈，假定p个圈和相间偶圈公共的边有k条（$V_2V_3,V_4V_5,V_6V_7,V_8V_9,V_{10}V_1$），去掉这$k$条边得$k$条路（图7中用粗黑线表示的），相间偶圈上的顶点是路的起点和终点，k条路与相间偶圈上Q的边（$V_1V_2,V_3V_4,V_5V_6,V_7V_8,V_9V_{10}$）组成一个Hamilton圈，$k$条路与相间偶圈上$Q^1$的边（$V_2V_3,V_4V_5,V_6V_7,V_8V_9,V_{10}V_1$）组成$p$个圈，就有$k-p$条路至少在二条路的圈中（图8中$V_4V_5V_6V_7V_9V_8V_4$圈），一个圈里有二条路时，必有$Q^1$的二条边，而Q的边与$Q^1$的边是相间的，在$Q^1$的两条边之间有一条Q的边，这条Q的边关联的顶点在二条路所在这一圈上，这样Q的$k-p$条边关联的顶点是同一圈的，相间偶圈上有Q的k条边，关联p个圈顶点的边是$k-(k-p)=p$条，p条边又在Hamilton圈上，必是p个圈的依次关联的桥．定理3证毕．

由定理3可见，已知图G的一个顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1,2,\cdots,n$）的生成子图Q，$G-E(Q)$是不连通的圈，图G中若无相间偶圈，可判定图G是非Hamilton图．

Petersen图，有顶点度为$d_G(V_i)-2$（$i=1,2,\cdots,n$）的生成子图Q_p，$G-E(Q_p)$是二个圈．二个圈的桥有5条（$V_1V_6,V_2V_7,V_3V_8,V_4V_9,V_5V_{10}$），只含两条桥的相间偶圈显然没有，由定理3，可知图是非Hamilton图．



Petersen 图



图Q_p

参 考 文 献

[1] R. Honsberger，关于Hamilton回路的理论，数学译林，1980年第3期，80－86．

[2] R. Honsberger，Mathematical Coms，1973．

[3] J.A.Bondy and U.S.R.Murty, Craph Theory with Applications, the Macmillan Press LTD, 1976．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.