1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

用〔F, d_n〕平均逼近周期函数*

施咸亮 陈全德
（杭州大学）

设$f(x)\in L_{2\pi}$的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\equiv\sum_{n=0}^{\infty}A_n(f,x) \tag{1}$$

以$s_n(f,x)\equiv\sum_{j=0}^{n}A_j(f,x)$表示（1）的第$n$部分和．称序列

$$E_n^q(f,x)=\frac{1}{(1+q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}s_k(f,x)$$

为$f(x)$（或级数（1））的(E,q)平均（Euler平均）Holland和Sahnay[1]曾证明，若$\omega(f,t)$表示$f\in C_{2\pi}$的连续模，那么成立不等式

$$e_n^q(f)\equiv\max_x|E_n^q(f,x)-f(x)|=O\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega(f,\frac{1}{k})}{k}\right) \tag{2}$$

在简报[2]中我们指出，（2）式的估计是不甚理想的，并且还给出了最优估计：

$$\sup_{f\in H[\omega]}e_n^q(f)\sim\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n+1)\qquad(n\to\infty) \tag{3}$$

本文的目的是在较一般的形式下给出（3）的证明．为此先引入一些概念和记号．

设$D=\{d_n\}$为给定非负数列，三角矩阵$A=(a_{nk})$由下列诸关系式确定：

$$a_{00}=1$$
$$\prod_{j=1}^{n}\frac{z+d_j}{1+d_j}=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}z^k,\quad n=1,2,\cdots. \tag{4}$$

称和

$$\tau_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_{nk}s_k(f,x)$$

为$f(x)$的$[F,d_n]$平均．周知，$[F,d_n]$求和法是正则求和法的充要条件是$H_n=\sum_{j=1}^{n}(1+d_j)^{-1}$无界．当$d_j\equiv q$时，$[F,d_n]$平均就是$(E,q)$平均

记$\triangle_u f(x)=f(x+u)-f(x)$，以

$$\omega_p(f,t)=\sup_{0\le u\le t}\|\triangle_u f(x)\|_{L_{2\pi}^p},\qquad 1\leqslant p\leqslant\infty$$

* 1986年9月13日收到。

表示$f(x)$的L^p连续模．简记$\omega(f,t)=\omega_\infty(f,t)$．

设$\omega(t)$为给定连续模．假如$f(x)\in L^p_{2\pi}$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 满足 $\omega_p(f,t)\leqslant\omega(t)$则记$f(x)\in$ $\in H_p[\omega]$．

设$\varphi(x)\in H_p[\omega]$，$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$．又设$\beta$为给定实数，$\mu=\{\mu_n\}$为实数列，$\mu_n=O(1)$．假如$f(x)$的Fourier级数有如下的形式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos(nt+\frac{\beta\cdot\pi}{2})\mathrm{d}t \tag{5}$$

则说$f(x)\in W_\beta[\mu]H_p[\omega]$．我们将考虑量

$$\mathscr{E}_n(D,\ W_\beta[\mu]H_p[\omega])=\sup_{f\in W_\beta[\mu]H_p[\omega]}\|\tau_n(f,x)-f(x)\|_{L^p_{2\pi}}\ .$$

它刻划着算子$\tau_n(f,x)$对族$W_\beta[\mu]H_p[\omega]$的逼近阶．本文中，我们将证明下述的

定理 设μ_n为正的递减数列，$\triangle^2\mu_n\geqslant 0$，$\mu_n n^s=O(\mu_m m^s)$ $(m\geqslant n)$，其中s为确定的正数，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$H_n\sim n$ $(n\to\infty)$．

i）设$\beta=0$ 则成立

$$\mathscr{E}_n(D,\ W_\beta[\mu]H_p[\omega])\sim K_{p,n}\mu_n\omega(\frac{1}{n}), \tag{6}$$

其中

$$K_{p,n}=\begin{cases}1, & \text{若}1<p<\infty,\\ \ln(n+1), & \text{若}p=1\text{或}p=\infty\end{cases};$$

ii）若$\int_0^t\frac{\omega(u)}{u}\mathrm{d}u\sim\omega(t)$，则（6）式成立；

iii）若$\sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{\mu_\nu}{\nu}\sim\mu_n$ 则（6）式成立．

特别，把它应用于(E,q)平均得到下述的

系 设$q>0$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$\omega(t)$和$\mu=\{\mu_k\}$满足定理条件，那么成立

$$\mathscr{E}_n^q(W_\beta[\mu]H_p[\omega])\equiv\sup_{f\in W_\beta[\mu]H_p[\omega]}\|E_n^q(f,x)-f(t)\|_{L^p_{2\pi}}\sim K_{p,n}\mu_n\omega(\frac{1}{n})\quad(n\to\infty).$$

盛淑云[3]曾对W^rH^α（即$\beta=0$，$\mu_n=1/n^r$，$r\geqslant 0$，$p=\infty$，$\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$时的$W_\beta[\mu]H_p[\omega]$ 类用(E,q)平均逼近阶作过研究．他证明，若$f\in W^rH^\alpha$，则

$$E_n^q(f,x)-f(x)=O(\frac{\ln(n+1)}{n^{r+\alpha}})\qquad(n\to\infty).$$

并且当$q=1$，$r=0$时，上式右边的“O”不能改为“o”．从我们的系可见，对一切$q\geqslant 0$和$r\geqslant 0$上式右边均不能改为“o”．

为证明定理，先建立几个引理．

引理1 设$A=(a_{nk})$由（4）定义，$H_n=\sum_{j=1}^{n}(1+d_j)^{-1}\sim n$．那么对于任意实数$s$成立

$$\sum_{k=0}^{n}a_{nk}(k+1)^s=O((n+1)^s)\qquad(n\to\infty). \tag{7}$$

证明 设$s\geqslant 0$， 则A的非负性和正则性推知（7）式成立．设$s<0$．令$q=[-s]+1$，

那么（7）的左边等于

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\frac{(k+1)^{q-s}}{(k+1)^{q}} = O\left((n+1)^{q-s}\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\frac{1}{(k+1)\cdots(k+q)}\right) \tag{8}$$

记$Q_n(\xi)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\xi^{k}=\prod_{j=1}^{n}(\xi+d_j)(1+d_j)^{-1}$，那么

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\frac{1}{(k+1)\cdots(k+q)}=\frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^1(1-\xi)^{q-1}Q_n(\xi)\,d\xi \tag{9}$$

由算术与几何平均不等式，

$$Q_n(\xi)\leqslant(A_n\xi+B_n)^n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

其中 $A_n=H_n/n$，$B_n=n^{-1}\sum_{j=0}^{n}d_j(1+d_j)^{-1}$. 作变量代换$u=A_n\xi+B_n$，注意到$A_n+B_n=1$，由（9）得到

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\frac{1}{(k+1)\cdots(k+q)}\leqslant\frac{1}{\Gamma(q-1)A_n^{q}}\int_{B_n}^{1}(1-u)^{q-1}u^{n}du=O\left((n+1)^{-q}\right).$$

把它代入（8）即得（7）. 证毕.

引理2 设$f(x)\in W_0[\mu]H_p[\omega]$. 且其Fourier级数有（4）的形式，其中$\mu_n$和$\omega(t)$满足定理条件，那么

$$\|s_n(f,x)-f(x)\|_{L^p_{2\pi}}=\mu_n\|s_n(\varphi,x)-\varphi(x)\|_{L^p_{2\pi}}+O\left(\mu_n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

证明 当$p=\infty$时见[4]，对一般的p类似可证.

引理3[5] 设$\varphi(x)\in H_p[\omega]$，那么

$$\left\|s_k(\varphi,x)-\varphi(x)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{g_x(t)}{t}\sin kt\,dt\right\|_{L^p_{2\pi}}=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

其中$g_x(t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)]$.

引理4[4] 设$\lambda>1$，那么对于f的Riesz平均

$$R_n^{\lambda}(f,x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\left(1-\left(\frac{j}{n+1}\right)^{\lambda}\right)A_j(f,n)$$

有估计式

$$\|R_n^{\lambda}(f,x)-f(x)\|_{L^p_{2\pi}}=O\left(\omega_p\left(f,\frac{1}{n}\right)\right),\quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

引理5 设$\mu_n\searrow$，$\mu_n>0$且$\triangle^2\mu_n\geqslant0$，$m\geqslant0$. 对于任意的三角多项式$T_n(x)=\sum_{j=1}^{n}(a_j\cos jx+\beta j\sin jx)$ 记

$$T_n(\mu,m;x)=\sum_{j=1}^{n}j^{m}(\mu_j)^{-1}(a_j\cos jx+\beta j\sin jx),$$

那么

$$\|T_n(\mu,m;x)\|_{L^p_{2\pi}}\leqslant C_{p,\mu,m}n^{m}\mu_n^{-1}\|T_n(x)\|_{L^p_{2\pi}}. \tag{10}$$

证明 记$A_j(x)=a_j\cos jx+\beta j\sin jx$，那么

$$T_n(\mu, m; x) = \sum_{j=1}^{n-1} \triangle(j^m \mu_j^{-1}) \sum_{l=1}^{j} A_l(x) + n^m \mu_n^{-1} T_n(x) \tag{11}$$

由于$\triangle\mu_j^{-1} = O((j\mu_{j+1})^{-1})$且

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left| \sum_{l=1}^{j} A_l(x) \right| \right\|_{L_{2\pi}^p} \leqslant C_p \|T_n(x)\|_{L_{2\pi}^p},$$

从(11)即可导出(10)．证毕．

定理的证明　为简便起见，我们仅在$\beta=0$及$p=\infty$的假设下证明定理，且简记$\|\cdot\|_{L_{2\pi}^p} = \|\cdot\|$．设$f(x) \in W_0[\mu]H[\omega]$，那么由定理2

$$\|\tau_n(f, x) - f(x)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mu_k \|s_k(\varphi, x) - \varphi(x)\| + O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mu_k \omega(\varphi, \frac{1}{k})\right).$$

由于$\mu_k k^s = O(\mu_n n^s)$，$k\omega(\varphi, \frac{1}{k}) = O(n\omega(\varphi, \frac{1}{n}))$．因此应用引理1便可导出

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mu_k \omega(\varphi, \frac{1}{k}) = O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})).$$

另一方面，同理又可得

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mu_k \|s_k(\varphi, x) - \varphi(x)\| = O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mu_k \omega(\varphi, \frac{1}{k}) \ln(k+2)\right) = O(\mu_n \omega(\frac{1}{n}) \ln(n+1)) \quad (n \to \infty).$$

因此有

$$\mathscr{E}_n(D, W_0[\mu]H[\omega]) \leqslant C\mu_n \omega(\frac{1}{n}) \ln(n+1) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

下面证明反向的不等式．设$f(x) \in W_0[\mu]H[\omega]$，且其Fourier级数有(4)的形式．设$\lambda > 1+s$，由引理4得到

$$\begin{aligned} I &\equiv \left\|\mu_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(\varphi, x) - \varphi(x))\right\| \\ &= \left\|\mu_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(\varphi, x) - R_k^\lambda(\varphi, x))\right\| + O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})). \end{aligned}$$

另一方面根据引理5，又可从上式导出

$$\begin{aligned} I &\leqslant C \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \frac{1}{(k+1)^\lambda} \sum_{j=1}^{k} j^\lambda \mu_j A_j(\varphi, x) \right\| + O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})) \\ &= C \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(f, x) - R_k^\lambda(f, x)) \right\| + O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})) \\ &= C \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(f, x) - f(x)) \right\| + O(1) \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \|R_k^\lambda(f, x) - f(x)\| + O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})) \end{aligned}$$

由于$R_k^\lambda(f, x) - f(x) = O(\mu_k \omega(\frac{1}{k}))$．因此综合上述议论导出

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_n(D, W_0[\mu]H[\omega]) &\geqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(f, x) - f(x)) \right\| \geqslant C\mu_n \left\| \sum_{k=0}^{n} a_{nk}(s_k(\varphi, x) - p(x)) \right\| \\ &+ O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})) = C\mu_n \|\tau_n(\varphi, x) - \varphi(x)\| + O(\mu_n \omega(\frac{1}{n})). \end{aligned}$$

设$\varphi(x)$是偶函数，$\varphi(o)=0$，$\varphi\in H[\omega]$，那么我们见到（见引理 3）

$$\tau_n(\varphi, 0)-\varphi(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} K_n(t)\mathrm{d}t+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{12}$$

其中

$$K_n(t)=\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n} a_{nk} e^{ikt}=\operatorname{Im}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{it}+d_j}{1+d_j} .$$

记

$$\Theta(t, z)=\frac{e^{it}+z}{1+z}$$

对于每个t，在$z=0$近旁$\ln\Theta(t,z)$是z的解析函数，并且（见〔6〕，引理 2 的证明）存在正数δ_1使当$0\leqslant|t|\leqslant\delta_1$时对于一切$z\geqslant0$有

$$\ln\Theta(t,z)=\frac{it}{1+z}-\frac{zt^2}{2(1+z)^2}+\frac{i(1-z)zt^3}{6(1+z)^3}+O\left(\frac{t^4}{1+z}\right) . \tag{13}$$

记

$$\triangle(t, z)=\ln\Theta(t, z)-\frac{it}{1+z}+\frac{zt^2}{2(1+z)^2}-\frac{i(1-z)zt^3}{6(1+z)^3} ,$$

由于当$z=0$时$\triangle(t, z)=0$，因此，由解析性推知

$$\triangle(t,z)=zt^4\triangle^*(t,z)$$

其中$\triangle^*(t,z)$在$z=0$近旁仍是解析的．由此可见，存在正数δ_2和$\eta\in(0,\frac{1}{2})$，以及正数M，使当$0\leqslant|t|\leqslant\delta_2$，$|z|\leqslant\eta$时$|\triangle^*(t,z)|\leqslant M$．从而当$0\leqslant|t|\ \ \delta_2$，$0\leqslant z\leqslant\eta$时有

$$\triangle(t, z)=O(t^4 z). \tag{14}$$

设$0\leqslant d_j\leqslant\eta$，那么由（14）得到

$$|\triangle(t,d_j)|\leqslant Kd_jt^4\leqslant K(1+\eta)^2\frac{d_jt^4}{(1+d_j)^2} .$$

设$d_j>\eta$，那么由（13），

$$|\triangle(t, d_j)|\leqslant K\frac{t^4}{1+d_j}\leqslant K\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\frac{d_jt^4}{(1+d_j)^2}.$$

记 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$．那么，当$0\leqslant|t|\leqslant\delta$时有

$$\triangle(t,d_j)=O\left(\frac{d_jt^4}{(1+d_j)^2}\right) .$$

于是我们有

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{it}+d_j}{1+d_j}=\exp\{\sum_{j=1}^{n}\ln\Theta(t, d_j)\}$$

$$=\exp\{it\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+d_j}+\frac{t^2}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{(1+d_j)^2}+i\frac{t^2}{6}\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-d_j)d_j}{(1+d_j)^3}+O\left(t^4\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{(1+d_j)^2}\right)\}.$$

把它代入（12）得

$$\tau_n(\varphi, 0)=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/H_n}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t}e^{iH_nt-G_0t^2/2+iQ_nt^3/3+O(t^4G_n)}\mathrm{d}t+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

其中 $G_n=\sum_{j=1}^{n}d_j(1+d_j)^{-2}$，$Q_n=\sum_{j=1}^{n}d_j(1+d_j)(1+d_j)^{-3}$.

取$\varphi(t)$使当$\pi/H_n^{2/3} \leq |t| \leq \pi$时$\varphi(t)\equiv 0$，那么注意到$G_n \leq H_n$，我们见到

$$\tau_n(\varphi,0)=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/H_n}^{\pi/H_n^{2/3}}\frac{\varphi(t)}{t}\sin H_n t\,\mathrm{d}t+O\left(\int_{\pi/H_n}^{\pi/H_n^{2/3}}\frac{\omega(t)}{t}G_n t^2\mathrm{d}t\right)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/H_n}^{\pi/H_n^{2/3}}\frac{\varphi(t)}{t}\sin H_n t\,\mathrm{d}t+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

易见对适当小的正数a(与n无关)，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} a\omega(\pi/H_n)\sin H_n x, & 0\leq x\leq \pi/[H_n^{2/3}]+1, \\ 0, & \pi/[H_n^{2/3}]+1\leq x\leq\pi, \\ \varphi(-x), & -\pi\leq x\leq 0 \end{cases}$$

属于H〔ω〕，对于它有

$$\tau_n(\varphi,0)=\frac{2a\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi}\int_{\pi/H_n}^{\pi/[H_n^{2/3}]+1}\frac{\sin^2 H_n t}{t}\mathrm{d}t+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\geq C\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln H_n+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim C\omega\left(\frac{1}{n}\right)(n+1)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这就证明了

$$\mathscr{E}_n(D,\ \mathrm{W}_0[\mu]\mathrm{H}[\omega])\geq C\mu_n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n+1).$$

证明完毕.

参 考 文 献

[1] A.S.B. Holland and B.N. Sahney, On degrel of approximation by Euler(E, q) means, Studia Sci. Math. Hung., 11(1976), 431—435.

[2] Xian Liang Shi and Quan De Chen, On the best degree of approximation by Euler (E, q) means, J Math. Res & Exp., 4(2)(1984), 96.

[3] 盛淑云，函数类$KW^{r}H^{\alpha}$的逼近问题，杭大学报，2(3)(1965)，66—74.

[4] 施咸亮,用瓦累一布然平均逼近连续函数，数学学报，23(6)(1981)，823—835.

[5] А.Ф.Тиман，Теория приближения функций Действительного переменного，Физматгиз，Москва (1960).

[6] 施咸亮，Fourier级数的(f,d_n)可和性，杭大学报，9(4)(1982)，403—415.