1988年11月

数学研究与评论
第八卷　第四期

Γ-环的回顾与展望*

陈维新

（浙江大学，杭州）

摘要

Γ环是本世纪六十年代由Nobusawa首导，经Barnes改进的一种新的代数系统，它是结合环的拓广，然而它和结合环又是十分接近的。本文概述了Γ环的发展，简述了由它衍生出来的一些代数系统，主要部分在于对今后Γ环的研究提出三点看法：选取富有Γ环特色的课题；搞清和其它代数系统的关系；注重好的例子。

环R上$m\times n(m\neq n)$阶矩阵的全体$M_{m\times n}(R)$，Abel群A, B（A≠B）间的群同态的全体Hom（A, B）不仅自身是常见的代数系统，而且在数学的许多分支中屡屡涉及并起着重要的作用。然而由于不能自然地定义乘法，$M_{m\times n}(R)$和Hom（A, B）均不能构成通常的结合环。于是就可设想是否能把通常结合环的定义扩充一下，把诸如$M_{m\times n}(R)$，Hom（A, B）那样重要，常见的代数系统包括进去？1964年Nobusawa[23]导入了一个新的概念：Γ_N-环.

定义1　设$\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$是Abel群，Nobusawa意义下的Γ-环（以下简称Γ_N-环）是Abel群$M=\{x,y,z,\cdots\}$带有二个合成$M\times\Gamma\times M\to M$，$\Gamma\times M\times\Gamma\to\Gamma$使对所有的$x,y,z,\in M$，所有的$\alpha,\beta\in\Gamma$满足条件：

1）　$(x+y)\alpha z=x\alpha z+y\alpha z$；$x\alpha(y+z)=x\alpha y+x\alpha z$.

1）′　$x(\alpha+\beta)y=x\alpha y+x\beta y$.

2）　$x\alpha(y\beta z)=(x\alpha y)\beta z$.

2）′　$(x\alpha y)\beta z=x(\alpha y\beta)z$.

3）　若$x\alpha y=0\ \forall x,y\in M$　则　$\alpha=0$.

然而定义中条件3）较强，以至于结合环未必都能很自然地解释成为Γ_N-环，故Ravisankar和Shukla[28]把上述定义中条件(3)去掉,称这样的代数系统为弱Γ_N环．这样一来任意一个结合环均能非常自然地解释成为弱Γ_N-环，这已是1979年的事了．更有意义的改进早在1966年由Barnes[1]作出，他把定义1中条件减弱为：Γ, M均为Abal群，带有一个合成$M\times\Gamma\times M\to M$满足定义1中条件1），1）′，2）．此时称M为Γ-环．

对$M_{m\times n}(R)$取$\Gamma=M_{n\times m}(R)$，对Hom（A, B）取Γ = Hom（B, A），对任意结合环R取Γ = R，则合成$M_{m\times n}(R)\times M_{n\times m}(R)\times M_{m\times n}(R)\to M_{m\times n}(R)$，Hom（A, B）× Hom（B, A）× Hom（A, B）→ Hom（A, B），$R\times R\times R\to R$的定义就很自然了．其实分别就是通常的矩阵乘法，同态的合成，环的乘法而已．这样$M_{m\times n}(R)$，Hom（A, B），R，均成为Γ-环（进

* 1986年9月5日收到．中国科学院科学基金资助的课题．

本文作为综述，曾在1986年第二届根理论讨论会上报告过．

而还是弱Γ_N环）．于是Γ环确是原先设想的比结合环更为广泛，又包含$M_{m\times n}(R)$，Hom(A，B)在内的新环类．

正因为如此，Barnes定义的Γ环远比Γ_N-环、弱Γ_N-环研究得更为详尽深入，引用得更为普遍．本文所阐述的主要也是Barnes定义的Γ环．

从上述知Γ_N环，弱Γ_N-环，Γ-环这三个概念，后者均是在前者的定义中删除某些约束条件而得到的，从而后者都是前者的推广．弱Γ_N环、Γ环都是结合环很自然的拓广．结合环也能看成Γ_N环．这是因Coppage和Luh[7]已指出：每一个Γ环总能成为关于某一个Abel群Γ'的Γ_N'环．Rarisankar和Shukla[28]还证明了：任一个弱Γ_N环均能嵌入到某个具有单位元的结合环中去．上述是这些环类间较为明显的关系．

当然Γ环的背景不仅局限于此，Hertenes的三元代数和三重系统；结合环R中的a homotope(R，a)：$x_a y=xay\ \ \forall x,y\in R$；以及把结合环的$a$ homotope推广到Jordan代数，就有Jordan代数$\mathcal{G}$的a homotope $\mathcal{G}^{(a)}$：$x_a y=\{xay\}\ \ \forall x,y\in\mathcal{G}$；而这恰是$\mathcal{G}$的三重积(triple product)．这都表明作为Γ环的特征：乘法合成的设想在许多代数系统中早就有所显露．瓜熟必将蒂落，Γ环的产生是有着实际的需要和丰富的背景的．

既然Γ环脱胎于结合环，又比结合环广泛，人们自然期望结合环论中的一些典型的结构定理能拓广到Γ环中去．早期的Γ环研究确定如此，Γ环论的开创之作Nobusawa的[23]就是把结合环中的半单Artin环，单Artin环的Wedderburn结构定理推广到Γ环．接下来Barnes的[1]，Luh的[20～22]分别把结合环中的Noether Lasker的理想准素分解定理，带有极小单侧理想的本原环的结构定理，本原环的稠密性定理，Liteff关于具有极小单侧理想的单环的结构定理等推广到Γ环．这些正是Γ环论中从时间上排的前五篇文章，其实接下来的一部分文章还是这样一个格调，这些工作都得到了预期的结果．

Kyuno教授在1985年奥地利“国际根的理论与应用会议”上作了“Γ环与根”的报告[31]，论证了三个重要定理：

1）具有乘法单位元的结合环范畴和具有强单位元的Γ_N环范畴是等价的．

2）Morita context环范畴和具有左、右单位元的Γ_N-环范畴是同构的．（Morita context环是一类具有单位元的结合环）．

3）M为Γ_N-环，由M可唯一确定左、右算子环L，R，M可视为L 模，R 模．Kyuno证明了作为模范畴，完全生成的L 模和完全生成的R 模是等价的．

这就阐明了Γ环类实际上和结合环类是十分接近的．这一方面说明了Γ环能保留结合环的许多好的性质，从而是结合环的一个理想的拓广．另一方面由于二者十分接近，拓广式的研究格局就要有所考虑，有所选择．对差异较大的代数系统要着眼于找出类同，以能沟通；而对很接近的代数系统则要着眼于找出差异，以示各自的特色。故在Γ环论中，我们所期望的拓广应不仅仅是简单的平移，而是希望具有Γ环的特色，希望比结合环有更丰富的内涵．这是我们在Γ环论中选题时首先应该考虑到的．比如说国内有不少同志选取的Γ环的幂零性（参见[32]、[33]，[47]，[49]，[51]，[56]，[58～60]）．这就是一个有点Γ环特色的课题．在结合环幂零性中元素只有一个层次：幂零；集合仅有二个：诣零，幂零．而在Γ环中，由于其乘法的特殊性，元素有幂零，强幂零之分；集合有诣零，强诣零，强幂零之分，这就比结合环幂零性内涵丰富，从而就有研究之必要．又如从Γ环乘法的定义就可预计到其

乘法单位元的复杂性．事实也正是如此，迄今已有Kyuno[12]、[14]引入的左（右）单位元，Booth[2]引入的强左（右）单位元，笔者[61]引入的a-左（右）单位元．三者侧重不同，然皆有Γ-环的特色．

所谓Γ-环的特色也可以这样来看．结合环论中对某个问题的不同的等价条件，可视为从不同的“角度”对这问题所作的本质刻划，一经拓广至Γ-环，可能有些刻划不变，有的却变了形，对这种变化我们颇有兴趣．

寻找一些带有Γ-环特色，比结合环有更丰富内涵的课题进行探讨，从而能更确切地反映Γ-环独特的面貌，这是其一．

从前述Kyuno的报告中可以看出Γ-环不仅有丰富的背景，而且和许多代数系统有着密切的联系．这样我们最好不要把Γ-环的课题仅仅局限在Γ-环上来研究，而是要与有关的代数系统的类似问题联系起来，作综合性的研讨．国外学者对Γ-环的Jacobson根（下简称为J-根）的研究就很有启迪．Coppage, Luh, Kyuno, Ravisankav, Shukla等人先后在[7]，[9]，[10]，[13]，[15～17]，[28]八篇文章中论述了Γ-环的J-根．他们不仅对Γ-环M的J-根，作了类似于结合环的元素理想刻划，模刻划，本原环刻划，并阐述了这些刻划的彼此等价，而且把M的J-根J(M)与M的左、右算子环L、R的J-根J(L)，J(R)作了比较，进而还与矩阵环$\Gamma_{n,m}$-环$M_{m,n}$的J-根，$M_2=\begin{pmatrix}R&\Gamma\\M&L\end{pmatrix}$的J-根作了比较，进行了详尽的讨论，得出了相应的结论，这样就使得对Γ-环的J-根有一个全面清晰的认识．

这就是说在研究Γ-环问题时，不仅要把该问题在Γ-环范围内搞清楚搞彻底，而且应把这问题和其它有关代数系统的类似问题的纵横联系也搞清楚，这样上下脉络清晰，左右联系沟通，对问题就能有一个全面的认识，这是其二．

其三，要注意例子．Booth在收到国内寄去的Γ-环研究资料的回信中第一个问题就问：你能举出一些强幂零Γ-环，Neumann正则Γ-环的有趣例子来吗？这问题提得好．你在文章中证明了结合环的某些概念和定理能推广到Γ-环，为了说明这种推广是存在的，是有意义的，最好的办法就是拿出实际例子来．当然这种例子应该是Γ-环中那些不是结合环的部分．好的实例能使人感到你的工作的意义和价值，从而对这工作更信服．其实有些例子也不难举出，如强幂零的Γ-环．设R为幂零的结合环，取$M=M_{m\times n}(R)$，$\Gamma=M_{n\times m}(R)$，易见Γ-环M就是强幂零的．

其四，一些脱胎于Γ-环的代数系统．

首先可很自然地提出Γ-代数的概念，Ravisankar和Shukla[28]，奚欧根[11]、[15]就先后引入了Γ-代数，并讨论了相应的性质，如奚欧根研究了Γ-代数的幂零性、根性．

徐忠明[38～40]把M和Γ的条件均减弱为有零元的Abel半群，导入Γ-半环的概念，建立了一些基本性质，研究了J-根的构造和几种刻划．

Γ-环类不仅十分接近结合环类，而且自身也是结合的．游宏[18]考虑了自身为非结合的Γ-环，即在Γ-环定义条件下除去2)．他研究了这类环的准素分解等问题．显见这类环是非结合环的推广．

注意到在Γ-环M的定义中，M和Γ虽同是Abel群，但所处的地位是不对称的，Γ是从属于M的．徐忠明[36]、[37]引入了M和Γ所处地位完全对等的双群合成环(M，Γ)，并研究了这类环的一些根性质．

也可以从另一个角度来处理上述M和Γ的不对称性．由于Γ-环定义中，Γ从属于M，使得在Γ-环研究中Γ的Abel群的构造很少起作用．鉴于此笔者[55]、[56]、[58]、[59]考虑Γ仅是一个集合，M是一个Abel群，$M\times\Gamma\times M\to M$的合成适合定义1的条件1)，2)的代数系统M，称之为广义Γ-环，它是比Γ-环更广泛的代数系统．这概念在解决Γ-环的幂零性，α单位元等方面起过很好的作用．最近笔者[63]证明了：具有单位元的广义Γ-环范畴和具有单位元的结合环范畴是等价的．

这些代数系统引入时间都很短，探索得不够，特征也尚未完全揭示．有的只能说是一个雏形，能否富有生命力而蓬勃发展，还得留待今后岁月的考验．

最后让我们来展望一下Γ-环的根理论的前景．

迄今Γ-环的素根，J根，Levitzki根，Koethe根，强幂零根，Brown-McCoy根，Neumann正则根等都有人研究，论述过．从上述列举中可以看出结合环的所谓具体的根，几乎在Γ-环中都已讨论过，而相当于Szász所著《Radicals of Rings》一书中的一般根至今却均无人涉及，这是为什么呢？

是否有这样一个因素在：上述具体的根都有一个元素刻划．素根：m-系统；J-根：拟正则元；Brown-McCoy根：G-正则元；Neumann正则根：Neumann正则元；其它根都涉及到Γ-环的幂零性，故而能体现出Γ-环的特色，研究起来就有一定的意义．Γ-环的特点正在于其乘法的特殊性，$x\alpha y$不同的规定下，Γ中元素α对M中元素影响可大可小，从而体现出Γ-环的丰富的内涵．如果在问题的研讨中不涉及元素，仅用某种环类，理想，同态，模之类的语言，工具来阐述，来研究，这里就有一个问题：是否会由于上述Γ-环的概念和结合环相应概念十分类似，这样的讨论是否会成为结合环中相应问题的平移而意义不大呢？太类似的复述就会平淡无奇．

这就需要有新的突破，使得在Γ-环根论的进一步研究中也能体现出Γ-环的特色，也能有比较丰富的内涵。这方面可供选择道路之一是Γ-环论中如何建立表示论．在结合环的模论中，一方面环R的单侧理想是R-模，另一方面模又是环的一个表示．在Γ-环现有的模理论中，只有Γ-环M的单侧理想是M的模这一面，然而迄今尚未和Γ-环的表示论挂起钩来．这就使我们可以设想，从建立起富有Γ-环特色的表示论着手，藉此去研究Γ-环的一般根理论，也许能走出一条Γ-环一般根论的独特的路来．

参 考 文 献

（一）国外部分

[1] W. E. Barnes, On the Γ rings of Nobusawa, Pacific J. Math., 18(1966), 411—422.

[2] G. L. Booth, A Brown-McCoy Radical for Γ rings, Quaestiones Math. 7(1984) No.3, 251—261.

[3] G. L. Booth, A note on Brown McCoy radicals of Γ-rings, Periodica Math. Hungarica, 18(1987) No.1, 73—76.

[4] G. L. Booth, Operator rings of gamma ring, (preprint).

[5] G. L. Booth, Characterizing the nil radical of a gamma ring, Quastiones Math, 9(1986), 55—76.

[6] G.L. Booth, A note on Γ-near-rings, (preprint).

[7] W. E. Coppage and J. Luh, Radicals of gamma rings, J. Math. Soc. Japan , (1971), 40—52.

[8] D. F. Hsu, On prime ideals and primary decompositions in Γ rings, Math. Japonica, 21(1976),

455—460.

[9] S. Kyuno, On the radicals of Γ-rings, Osaka J. Math., 12(1975), 639—645.

[10] S. Kyuno, On the semi-simple gamma rings, Tohoku Math. J., 29(1977), 217—225.

[11] S. Kyuno, On prime gamma rings, Pacific J. Math., 75(1978), 185—190.

[12] S. Kyuno, A gamma ring with the right and left unities, Math. Japonica, 24(1979), 191—193.

[13] S. Kyuno, Coincidence of the right Jacobson radical and the left Jacobson radical in a gamma ring, Tsukuba J. Math., 3(1979), 31—35.

[14] S. Kyuno, Nobusawa's gamma rings with the right and left unities, Math. Japonica, 25(1980), 179—190.

[15] S. Kyuno, A gamma ring with minimum conditions, Tsukuba J. Math., 5(1981), 47—65.

[16] S. Kyuno, On a Nobusawa's gamma ring $\begin{pmatrix} R & \Gamma \\ M & L \end{pmatrix}$, Math. Japonica, 26(1981), 55—64.

[17] S. Kyuno, Notes on Jacobson radicals of gamma rings, Math. Japonica, 27(1982), 107—111.

[18] S. Kyuno, Prime ideals in gamma rings, Pacific J. Math., 98(1982), 375—379.

[19] S. Kyuno, Subdirect sums of Nobuswa gamma ring, Math. Japonica, 28(1983), 31—36.

[20] J. Luh, On the theory of simple Γ rings, Michigan Math. J. 16(1969), 65—75.

[21] J. Luh, On primitive Γ-rings with minimal onesided ideals, Osaka J. Math., 5(1968), 165—173.

[22] J. Luh, The structure of primitive gamma rings. Osaka J. Math., 7(1970), 267—274.

[23] N. Nobusawa, On a generalization of the ring theory, Osaka J. Math., 1(1964), 81—89.

[24] N. Nobusawa, Structure theorems of a module over a ring with bilinear mapping, Canad. Math. Bull., 10(1967), 649—652.

[25] N. Nobusawa, On duality in Γ-rings, Math. J. Okayama Univ. 25(1983), 69—73.

[26] N. Nobusaws, Γ-rings and Morita equivalence of rings. Math. J. Okayama Univ. 26(1984), 151—156.

[27] M. Parvathi and P. A. Rajendran, Gamma rings and Morita equivalence, Communication in Algebra, 12(14), 1781—1786(1984).

[28] T. S. Ravisanker and U. S. Shukla, Structure of Γ-rings, Pacific J. Math., 80(1979), 539—559.

[29] Z. K. Warsi, On decomposition of primary ideals of Γ-rings, Indian J. Pure Appl. Math., 9(1978), 912—917.

[30] S. Kyuno, Rugular gamma rings, (in preperation).

[31] S. Kyuno, Gamma rings and radicals, The lecture at International Conference on Radicals — Theory and Application, 9.16—9.23, 1985. at Krems(in Austrin).

(二) 国内部分

[32] 池澄、徐忠明，关于Γ-环的幂零性问题，杭州大学学报，8(1981) No.2, 137—141.

[33] 徐忠明，关于满足链条件的Γ-环，杭州大学学报，9(1982) No.3, 251—255.

[34] 徐忠明，关于半单右ArtinΓ-环的结构，杭州大学学报，10(1983) No.1, 10—17.

[35] 徐忠明，关于Γ-环的稠密性定理，数学研究与评论，3(1983) No.3, 21—26.

[36] 徐忠明，关于双群合成环的Baer下诣零根，浙江丝绸工学院学报，3(1986) No.1, 60—66.

[37] 徐忠明，关于双群合成环的Levitzki根，(待发表).

[38] 徐忠明，关于Γ-半环，数学研究与评论，(1981) No.1, 11—24.

[39] 徐忠明，关于Γ-半环的亚直和，杭州大学学报，9(1982), No.1, 74—80.

[40] 徐忠明，关于Γ-半环的Jacobson根，数学研究与评论，(1982) No.1, 5—16.

[41] 徐忠明，关于不含幂零理想的Γ半群，杭州丝绸工学院学报，1（1984）No.3，28—33.
[42] 汪声远，Γ环的σ结构，江西师院学报（自），（1982）No.2，17—23.
[43] 汪声远，关于Γ环的σ理想，江西师院学报（自），（1983）No.2，43—47.
[44] 奚欧根，域上Γ代数的强幂零性，浙江师院学报（自），5（1982），16—20.
[45] 奚欧根，关于域上Γ代数的强幂零根的一些注记，浙江师院学报（自），6（1983），10—12.
[46] 奚欧根，域上Γ代数的拟强幂零根，浙江师院学报（自），7（1984）No.1，29—32.
[47] 游宏、郭元春，具链条件的Γ环，松辽学报（自），3（1984），1—4.
[48] 游宏，非结合的Γ环，数学杂志，5（1985）No.1，15—22.
[49] 郭元春，关于Γ环的诣零子环的幂零性，吉林大学学报（自），（1985）No.1，1—8.
[50] 马志大，Γ环的z正则根，数学学报，29：4（1986），501—506.
[51] 辛林，Γ环的弱幂零性质，宁德师专学报，（1984）No.4，1—8.
[52] 高天青，拟本原Γ环，宁波师院学报（自），（1985）No.1，22—27.
[53] 高天青，Γ环的拟Jacobson根（待发表）.
[54] 陈维新，弱Γ_N环的最大（Neumann）正则理想，浙江大学学报，15（1981）No.3，68—72.
[55] 陈维新，Γ环和广义Γ环中的Levitzki定理，浙江大学学报，17（1983）No.4，51—56.
[56] 陈维新，Γ环和广义Γ环的强幂零性，数学研究与评论，4（1984）No.4，3—9.
[57] 陈维新，Γ环的最大Von Neumann正则理想，浙江大学学报，18（1984）No.4，133—138.
[58] 陈维新，左零因子理想具升链条件之Γ环和广义Γ环，数学研究与评论，5（1985）No.2，1—4.
[59] 陈维新，Γ环和广义Γ环的强幂零性II.，浙江大学学报，19（1985）No.3，114—116.
[60] 陈维新，循环Γ环之诣零性质，浙江大学学报，20（1986）No.2，83—85.
[61] 陈维新，Γ环的α单位元及α除环，浙江大学学报，21（1987）No.5，120—127.
[62] 陈维新，Γ环具有强单位元的条件，JMRE，Vol.8，No.4（1988）.
[63] 陈维新，环范畴和广义Γ环范畴间的关系（待发表）.

The Retrospect and Prospect for the Γ-rings

Chen Weixin

(Zhejiang University)

Abstract

Γ ring appeared in the middle 1960's as a new algebraic system. This concept was first introduced by Nobasawa. Later Barnes gave a more current definition than Nobusawa did. Γ ring class is more general than associative ring class. However the two are quite close. In this paper we give a sarvey on the development of Γ rings and brief narration on some algebraic systems that are derived from Γ rings. As the main body I make three suggestions for furture research of Γ ring theory.

1. Select the subjects with the characteristies of Γ rings.
2. Make clear the relation between Γ rings and other algebraic systems.
3. Pay great attention to good examples.