1988年11月

数学研究与评论
第八卷 第四期

# 一类奇异积分算子——进展与问题*

施 咸 亮

（杭 州 大 学）

设$K(x)$和$f(x)$是实直线$\mathrm{R}^1=(-\infty,\infty)$上可积的两个函数．周知，它们的卷积

$$K*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy$$

作为绝对收敛的积分几乎处处存在．但是，即使其中一个函数不可积，这个卷积还是可能按某种意义几乎处处存在．最使我们感兴趣的例子是$K(x)=\frac{1}{x}$这一简单的特殊情形．记

$$Hf(x)=\mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y.$$

称$Hf$是$f$的共轭函数或Hilbert变换．假如$f(x)$是可积的，那么上面的主值积分几乎处处存在．此外，还成立所谓的Riesz不等式

$$\|Hf\|_{L^p}\leqslant A_p\|f\|_{L^p},\quad 1<p<\infty,$$

其中常数$A_p$仅与$p$有关．这些事实的多元类似最早被A. P. Calderon和A. Zygmund所研究（见他们1952年的开创性论文[1]）．设$x\in\mathrm{R}^n$，$n>1$，$K(x)$是$\mathrm{R}^n\setminus\{0\}$上局部可积函数．定义算子

$$Tf(x)=\mathrm{p.v.}K*f(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x-y|>\varepsilon}K(x-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

他们建立了下述的

**定理1** 设$K(x)$满足

i）消失条件

$$\int_{0<R_1<|x|<R_2<\infty}K(x)\mathrm{d}x=0\quad(\forall 0<R_1<R_2);$$

ii）齐次条件

$$K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}\qquad(|x|\neq 0),$$

其中$\Omega(x)$是零阶齐次函数；

iii）Dini条件

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t<\infty,$$

1986年10月21日收到．

其中$\omega(t)=\sup_{|x-y|\leqslant t,\ |x|=|y|=1}|\Omega(x)-\Omega(y)|$．那么算子$T$是$L^p\to L^p$有界的，且成立

$$\|Tf\|_{L^p}\leqslant A_p\|f\|_{L^p}, \qquad (1)$$

其中$1<p<\infty$，常数$A_p$仅与$n$及$p$有关．

这一定理已在后来Hörmander等人的工作中得到改进．例如，在E. M. Stein的书[2]中我们可以找到下面两个定理，它们都优于定理1．

**定理 2** 设$n\geqslant 1$, $K(x)$满足条件i), ii)和iii′) Hörmander条件

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K(x+y)-K(x)|dx\leqslant B \qquad (|y|\neq 0)$$

那么算子$T$是$L^p\to L^p$有界的，$1<p<\infty$，且成立不等式(1)．

**定理 3** 设$n\geqslant 1$, $K(x)$满足条件i), iii′)和ii′)大小条件

$$K(x)=O\left(\frac{1}{|x|^n}\right) \qquad (|x|\neq 0)$$

那么算子$T$是$L^p\to L^p$有界的，$1<p<\infty$ 且成立不等式(1)．

1979年R. Fefferman研究了下述较一般形式的算子．设$K(x)$是经典的核，$b(x)$是有界半径函数，即存在$[0,\infty)$上实质有界函数$b_0(t)$使$b(x)=b_0(|x|)$．令$H(x)=K(x)b(x)$．定义

$$T_0f(x)=\mathrm{p.v.}\,H*f(x).$$

正如他所说，这类算子不能用经典的讨论来研究．在论文[3]中他通过了精致的估计建立了下述的

**定理 4** (R. Fefferman[3]) 设$n\geqslant 2$, $K(x)$满足定理1的条件，那么算子$T_0$是$L^2\to L^2$有界的．

当$n=1$时定理4的结论不成立．

自然，人们会提出下面的问题．

**问题 1** 设$n\geqslant 2$, $K(x)$满足定理2的条件，那么算子$T_0$是不是$L^2\to L^2$有界的？

**问题 2** 设$n\geqslant 2$, $K(x)$满足定理3的条件，那么算子$T_0$是不是$L^2\to L^2$有界的？

这两个问题是A. Torchinsky教授告诉笔者的．我们已在[4]中作了讨论．问题1的回答是肯定的，也即成立着下述的

**定理 5** (X. Shi[4]) 设$n\geqslant 2$, $K(x)$满足定理2的条件，那么算子$T_0$是$L^2\to L^2$有界的．

为了研究问题2我们引入$\wedge$BMV函数类，这是我们在[6]中研究过的．设$\{\lambda_k\}$是递增正数列，$\Lambda_m=\sum_{j=1}^{m}1/\lambda_j\nearrow\infty$，又设$\{I_k=[\alpha_k,\beta_k]\}$是$[0,\infty)$上不重叠区间列．定义在$[0,\infty)$上局部可积的函数$f(x)$称为具有$\wedge$有界平均变差，简记$f(x)\in\wedge$BMV，倘若存在正数$M$使对每个区间列$\{I_k=[\alpha_k,\beta_k]\}$成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{I_k}(f)}{\lambda_k}\leqslant M,$$

其中

$$\mu_{I_k}(f)=\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}|f(x)-f_{I_k}|\,dx,\quad f_{I_k}=\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}f(u)\,du.$$

我们建立了下述的

**定理 6** (X.Shi[4]) 设$b(x)=b_0(|x|)$，$b_0(t)\in L^\infty[0,\infty)\cap\wedge BMV$，$1<p<\infty$. 那么对于一切$n=1,2,\cdots$和满足i), ii′), iii′)的核$K(x)$算子$T_0f=\text{p.v.}H*f$是$L^p\to L^p$有界的，当且仅当$m^{1/A_m}=O(1)$.

定理5自然优于定理4，但下述问题至今仍未被解决.

**问题 3** (未解决) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足定理2(或定理1)的条件，那么算子$T_0$是不是$L^p\to L^p$有界的？其中$1<p<\infty$，但$p\neq2$.

假如$K(x)$满足比定理2的假设更强的条件，那么$T_0$有可能是$L^p\to L^p$有界的，其中$1<p<\infty$. 事实上根据R. Fefferman[3]知道，设$n\geqslant2$, $K(x)$满足i), ii)且$\Omega(x)$满足Lipschitz条件

$$|\Omega(x)-\Omega(y)|=O(|x-y|^\eta)\qquad(|x|=|y|=1,\eta>0)$$

那么算子$T_0$是$L^p\to L^p$有界的$(1<p<\infty)$. 这一结果也已被作了如下的改进.

设$\Sigma_{n-1}$为$R^n$中的单位球面. 对于$g(x)\in L^1(\Sigma_{n-1})$我们定义它的$L^1$-连续模如下(见[5]). 设$\rho$是$R^n$中绕原点的真旋转，且记$|\rho|=\sup\limits_{|x|=1}|x-\rho x|$. 称函数

$$\omega_1(t)=\sup_{|\rho|\leq t}\int_{\Sigma_{n-1}}|g(\rho x)-g(x)|\,d\sigma(x)\qquad(0\leqslant t\leqslant\pi)$$

为$g$的$L^1$-连续模，其中$d\sigma(x)$为$\Sigma_{n-1}$上的面积分元. 我们建立了下述的

**定理 7** (X.Shi[4]) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足i), ii), 且$\Omega(x)$的$L^1$-连续模$\omega_1(t)=O(t^\eta)$ $(\eta>0)$，那么算子$T_0$是$L^p\to L^p$有界的，$1<p<\infty$.

另一方面，J.Namazi[6]建告了下述精美的$L^p$有界结果:

**定理 8** (J.Namazi[5]) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足i), ii)且$\Omega(x)\in L^q(\Sigma_{n-1})$ $(1<q\leqslant\infty)$，那么算子$T_0$是$L^p\to L^p$有界的，$1<p<\infty$.

我们提出下面两个未解决的问题.

**问题 4** (未解决) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足定理7的条件，那么算子$T_0$是不是弱(1,1)型的，也即是否成立不等式

$$m\{x:|T_0f(x)|>a\}\leqslant\frac{A}{a}\|f\|_{L^1}\quad(\forall a>0)?$$

**问题 5** (未解决) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足定理8的条件，那么算子$T_0$是不是弱(1,1)型的？

设$\omega(x)$是$R^n$上几乎处处有限且取正值的可测函数. 下列问题还尚未解决.

**问题 6** (未解决) 设$n\geqslant2$, $K(x)$满足定理4或定理5的条件，那么对于怎样的权函数$\omega$不等式

$$\|T_0f\|_{L^2(\omega)}\leqslant A\|f\|_{L^2(\omega)}$$

对一切$f\in L^2(\omega)$成立，其中$\|\cdot\|_{L^p(\omega)}$定义如下:

$$\|f\|_{L^p(\omega)}=\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\quad(1<p<\infty).$$

**问题 7**（未解决） 设$n\geq 2$, $K(x)$满足定理 7 或定理 8 的条件，那么对于怎样的$\omega$，不等式

$$\|T_0 f\|_{L^p(\omega)}\leq A_p\|f\|_{L^p(\omega)}\quad(1<p<\infty)$$

对一切$f\in L^p(\omega)$成立?

## 参 考 文 献


[1] A. P. Calderón and A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals. Acta Math., 88(1952), 85—139.

[2] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[3] R. Fefferman, A note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.74, No.2(1979), 266—270.

[4] Xian liang Shi, Some remarks on singular integrals, Indiana Vniv. Math. J., Vol.35, No.1 (1986), 103—116.

[5] J. Namazi, A singular integral, Proc. Amer. Math. Soc, Vol.96, No.3(1986), 421—424.

[6] Xian Liang Shi, On ΛBMV functions with some applications to theory of Fourier series, Scientia Sinica (Ser. A), Vol.28, No.2 (1985), 147—158.


# A Class of Singular Integral Operators
## ——Developments and Problems


*Shi, Xian Liang*

(Hangzhou University)



### Abstract

In the present paper we introduce some results on singular integral operators defined by

$$Tf(x)=\mathrm{p.v.}H*f(x),$$

where $H(x)=b(x)K(x)$, $b(x)$ is a bounded radial function and $K(x)$ is a clas sical kernel. Futhermore we propose some open problems on $L_p$ boundedness of the operator $T$.