第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

强p除环上方阵的酉相似理论(Ⅲ)*

屠伯埙

(复旦大学数学系，上海)

本文将解决前文(Ⅱ)[4]中提出的问题，给出强p除环上方阵酉相似理论的又一个关键性结论以及它的应用.

本文仍沿用前文(Ⅰ)[3]、(Ⅱ)[4]中的记号：Ω表示加强p除环；Z表示Ω的中心(子域)；Σ是Z的代数封闭扩张、$\Sigma\subset\Omega$，其他记号仍同前文(Ⅰ)、(Ⅱ)，除必要时，一般不再另作说明.

定义 设A是Ω上$n\times n$阵，如存在Ω上$n\times n$非奇异阵P，使$P^{-1}AP$是Σ上方阵，则称A为Ω上的可Σ化阵.

例如，Ω上可中心化阵[1]是可Σ化阵.

又如，Σ上任何方阵(自然)是可Σ化阵.

引理1 Ω上任何$n\times n$非奇异阵A必有分解式：$A=QU$，其中Q是Ω上$n\times n$酉阵，U是Ω上的主对角元全是非零中心元的上三角阵. 详言之，即成立：

$$A=Q\begin{bmatrix}\|u_{11}\| & & & \\ & \|u_{22}\| & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \|u_{nn}\|\end{bmatrix}, \tag{1}$$

其中$0\neq\|u_{ii}\|\in R\subseteq Z$，$i=1,2,\cdots,n$.

证明 由[3]中的定理2知，对$n\times n$阵A，存在$n\times n$酉阵Q_1、$n\times n$上三角阵$U_1=(u_{ij})_{n\times n}$；$u_{ij}=0$，$i>j$，使

$$A=Q_1U_1, \tag{2}$$

因A非奇异，故U_1亦非奇异，于是由除环上矩阵的一般理论[2]知，$u_{ii}\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n$. 故由p除环的正性性质(见[3]的引言)，$\|u_{ii}\|^2=u_{ii}\overline{u_{ii}}=N(u_{ii})\neq 0$，故$\|u_{ii}\|\neq 0$；$i=1,2,\cdots,n$. 于是将$U_1$改写成：

$$\begin{bmatrix}u_{11}\|u_{11}\|^{-1} & & & \\ & u_{22}\|u_{22}\|^{-1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn}\|u_{nn}\|^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|u_{11}\| & & & \\ & \|u_{22}\| & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \|u_{nn}\|^{-1}\end{bmatrix}, \tag{3}$$

* 1986年9月8日收到.

易证diag $\{u_{11}\|u_{11}\|^{-1}, u_{22}\|u_{22}\|^{-1}, \cdots, u_{nn}\|u_{nn}\|^{-1}\} = Q_2$ 是Ω上酉阵，故$Q = Q_1Q_2$亦是酉阵，由此式及（2）、（3）两式便得到（1）式．证毕．

今证下列关键结论，即

定理1 设A是Ω上$n\times n$可Σ化阵，则必存在Ω上$n\times n$酉阵Q，使

$$\overline{Q}'AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$\Sigma$中的元素．

证明 因A可Σ化，故存在Ω上$n\times n$非奇异阵P_1，使

$$P_1^{-1}AP_1 = A_1, \tag{5}$$

此处A_1是Σ上$n\times n$阵．因Σ是代数封闭域，故由域上方阵的标准形理论知，存在Σ上$n\times n$非奇异阵P_2，使

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A_1$（在$\Sigma$中）的特征值．记$P = P_1P_2$，则$P$是$\Omega$上非奇异阵，且由(5)、（6）两式即得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

由引理1，

$$P = Q\begin{bmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中Q是酉阵，$\overline{Q}' = Q^{-1}$，z_1、z_2、$\cdots$、z_n是Ω的中心Z中的非零元素．将（8）式代入（7）式，并经过简单的矩阵运算，即得

$$\overline{Q}'AQ = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & z_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1^{-1} & & \\ & z_2^{-1} & * \\ & & \ddots \\ 0 & & & z_n^{-1} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

由于$z_i\in Z$，故$z_i\lambda_iz_i^{-1} = \lambda_i$；$i = 1, 2, \cdots, n$．于是（9）式即（4）式．证毕．

例 设Ω是实四元数体，则其中心Z是实数域，对Ω上3×3阵：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ i+k & 1 & -i\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

由于存在Ω上 3 × 3 非奇异阵：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1-j\\ i & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ 0 & 0 & i\\ \frac{1}{2}(1+j) & 0 & 0\end{bmatrix},$$

使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & i & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\tag{10}$$

故 A 是可Z（i）化阵，此处Z（i）是Z的代数封闭扩张域．又显然可知，

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1-j\\ i & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\\ i & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}=QU,\tag{11}$$

而

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)\\ i & 0 & 0\\ 0 & -i & 0\end{bmatrix}$$

（显然）是Ω上酉阵，而 $U=\mathrm{diag}\{1,1,\sqrt{2}\}$．故由（10）、(11）两式即得

$$\bar{Q}'AQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & j & 2\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

从此例看出，Q 不是Z（i）上方阵，而是Ω上酉阵．

注1　定理1是Schur定理在加强 p 除环上更一般的推广．在〔5〕中，已将复矩阵论中著名的Schur定理(即复方阵必酉相似于复上三角阵)，推广到到实四元数体上的可中心化阵[5]．而本文的定理1又作了如下三方面的改进：

（i）将基体四元数体推广为一般的加强 p 除环Ω；

（ii）将可中心化阵（四元数体上的）扩大为Ω上的可Σ化阵；

（iii）将上三角阵的主对角元属于四元数体本身，相应地在Ω上缩小为属于Ω的真子体Σ．

由于这三方面的改进，使得以下处理了Ω上更多的矩阵问题．

运用定理1，我们可十分简捷地证明下述已出现过的重要结论，（〔4〕的定理2与定理3），即

系1　Ω上任何 $n\times n$ 自共轭阵 A 至少有 n 个特征值在其中心Z中．并且，A 必酉相似于主对角元全是 A 的特征值的对角阵．

证明　由〔4〕的定理1可知，A 可中心化，故成立（4）式．由（4）式以及除环上矩阵的一般理论[2]知，

$$\bar{Q}'\bar{A}'Q=\overline{(\bar{Q}'AQ)'}=\begin{bmatrix}\bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ *' & & & \bar{\lambda}_n\end{bmatrix}, \tag{12}$$

因为$A=\bar{A}'$，故比较（4）式与（12）式的右端矩阵，即得$*=0$，且$\lambda_i=\bar{\lambda}_i$； $i=1,2,\cdots,n$，故$\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n\in R\subseteq Z$．于是（4）式可简化为$\bar{Q}'AQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in Z$，由上式，易知$\lambda_i$全是$A$的特征值．证毕．

上述结论在〔4〕中是化了较大功夫证得的．其原因在于，一般化定义方阵的左（右）特征值而导致证明的复杂性．

系2 Ω上可Σ化阵至少有一个右特征值在Σ中．

证明 设A是可Σ化阵，则成立（4）式．将（4）式的Q按它的n个列分块：$Q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$，将（4）式化为

$$A(q_1,q_2,\cdots,q_n)=(q_1q_2,\cdots,q_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

由上式便得$Aq_1=q_1\lambda_1$，故λ_1是A在Σ中的一个右特征值．证毕．

定理2 Ω上两个酉相似的$n\times n$自共轭阵A与B至少有n个公共的特征值在Z中．并且，A与B有相同的迹：$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$，亦即它们的主对角元素之和相等．

证明 由假设，存在Ω上酉阵Q_1，使

$$\bar{Q}_1'AQ_1=B. \tag{13}$$

对方阵B，由系1，必存在Ω上$n\times n$酉阵Q_2，使

$$\bar{Q}_2'BQ_2=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}, \tag{14}$$

而$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in Z$．由〔4〕的定理4："自共轭阵的迹与该阵所酉相似的对角阵的迹相同"，并由（14）式即得

$$\mathrm{tr}B=\sum_{i=1}\lambda_i, \tag{15}$$

记$Q=Q_1Q_2$，则Q是Ω上酉阵，且由（13）、（14）两式即得

$$\bar{Q}'AQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}. \tag{16}$$

（14）、（16）两式说明，A与B至少有n个公共的特征值在中心中．再由（16）式可得

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \tag{17}$$

（15）式与（17）式合起来即得$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$．证毕．

注2 Ω上两个相似的方阵未必有相同的迹．这由下式：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & k\\ j & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -i & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-j & *\\ * & 1-j\end{bmatrix}$$

便可看出，此处Ω取实四元数体．这是体上矩阵与域上矩阵的又一区别之处．

定理3 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是Ω上可Σ化阵，又设（4）式如下形：

$$\overline{Q}'AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1\sigma_{12}\cdots\sigma_{1n}\\ \lambda_2\cdots\sigma_{2n}\\ \ddots\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}; \tag{18}$$

则必成立下列恒等式：

$$\sum_{i,j=1}^{n}N(a_{ij})=\sum_{i=1}^{n}N(\lambda_i)+\sum_{1\leq i<j\leq n}N(\sigma_{ij}), \tag{19}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}N(a_{ij}+\overline{a}_{ji})=\sum_{i=1}^{n}N(\lambda_i+\overline{\lambda}_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}N(\sigma_{ij}). \tag{20}$$

证明 由（15）式即得

$$\overline{Q}'\overline{A}'Q=\begin{bmatrix}\overline{\lambda}_1 & & & \\ \overline{\sigma}_{12} & \overline{\lambda}_2 & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{\sigma}_{m} & \overline{\sigma}_{2n} & \cdots & \overline{\lambda}_n\end{bmatrix}, \tag{21}$$

故由（18）、(21）两式可得：

$$\overline{Q}'A\overline{A}'Q=\begin{bmatrix}N(\lambda_1)+\sum_{j=2}^{n}N(\sigma_{1j}) & & & \\ & N(\lambda_2)+\sum_{j=3}^{n}N(\sigma_{2j}) & & * \\ & & \ddots & \\ * & & & N(\lambda_{n-1})+N(\sigma_{n-1,n}) \\ & & & & N(\lambda_n)\end{bmatrix}, \tag{22}$$

故由定理2即得

$$\operatorname{tr}(A\overline{A}')=\sum_{i=1}^{n}N(\lambda_i)+\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n}N(\sigma_{ij}), \tag{23}$$

又显然成立：$\operatorname{tr}(A\overline{A}')=\sum_{i,j=1}^{n}N(a_{ij})$，此式与（23）式合起来便得（19）式：

又由（18）与（21）式可得：

$$\overline{Q}'(A+\overline{A}')Q=\begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda & \sigma_1 & \cdots\sigma_{1n}\\ \overline{\sigma}_{12} & \lambda_2+\overline{\lambda}_2 & \cdots\sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \overline{\sigma}_{m} & \overline{\sigma}_{2n} & \cdots\lambda_n+\overline{\lambda}_n\end{bmatrix},$$

由上式容易算得方阵$\overline{Q}'(A+\overline{A}')^2Q=(\overline{Q}'(A+\overline{A}')Q)^2$的$n$个主对角元依次分别是：

$N(\lambda_1+\overline{\lambda}_1)+\sum_{j=2}^{n}N(\sigma_{1j})$，$N(\sigma_{12})+N(\lambda_2+\overline{\lambda}_2)+\sum_{j=3}^{n}N(\sigma_{2j})$，$\cdots$，$\sum_{i=1}^{n-2}N(\sigma_{i,n-1})+$

$+N(\lambda_{n-1}+\overline{\lambda}_{n-1})+N(\sigma_{n-1,n})$，$\sum_{i=1}^{n-1}N(\sigma_{in})+N(\lambda_n+\overline{\lambda}_n)$， 故由定理2即得（20）

证毕.

定义 如Ω上可Σ化阵A满足：$A\bar{A}'=\bar{A}'A$，则A为广义Σ正规阵.

称Σ上的酉阵为Σ酉阵. 称Σ上斜自共轭阵（$\bar{A}'=-A$）为Σ斜自共轭阵. 称Σ上正规阵为Σ正规阵.

显然，Σ酉阵、Σ斜自共轭阵、(一般地）Σ正规阵全是广义Σ正规阵. Ω上自共轭阵亦是广义Σ正规阵.

定理4 Ω上广义Σ正规阵必酉相似于Σ上对角阵. 即成立：

$$\bar{Q}'AQ=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\},\tag{24}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n\times n$阵$A$在$\Sigma$中的右特征值.

反之，如Ω上$n\times n$阵A成立（24）式，则A必是广义Σ正规阵.

证明 因为对任何可Σ化阵A，成立（18）、(21）两式，故得（22）式. 又由（18）、（21）两式还可得

$$\bar{Q}'\bar{A}'AQ=\begin{bmatrix} N(\lambda_1) & & & & \\ & N(\lambda_2)+N(\sigma_{12}) & & * & \\ & & \ddots & & \\ & * & & N(\lambda_{n-1})+\sum_{i=1}^{n-2}N(\sigma_{i,n-1}) & \\ & & & & N(\lambda_n)+\sum_{i=1}^{n-1}N(\sigma_{in}) \end{bmatrix},\tag{25}$$

今A是广义Σ正规：$A\bar{A}'=\bar{A}'A$，故比较（22）式与（25）式右端方阵的主对角元，可得$N(\sigma_{ij})=0$; $1\le i<j\le n$，再由p除环的正性性质（见前文（Ⅰ)），即知$\sigma_{ij}=0$；$\forall_{i,j}$，$1\le i<j\le n$，于是（18）式化为（24）式.

反之，由（24）式显然可得$\bar{Q}'\bar{A}'AQ=\bar{Q}'A\bar{A}'Q$，故$A\bar{A}'=\bar{A}'A$，即$A$是广义$\Sigma$正规阵. 证毕.

系3 任何$n\times n$广义Σ正规阵（在Σ中）至少有n个右特征值.

这由（24）式可明显地看出.

系4 $n\times n\,\Sigma$酉阵A至少有n个右特征值在Σ中，且A酉相似于以A的n个右特征值为主对角元的对角阵，其右特值λ_i全满足$N(\lambda_i)=1$；$i=1,2,\cdots,n$. 此处1是Ω的乘法单位元.

证明 Σ酉阵自然是广义Σ正规阵，故成立（24）式. 再由$\bar{Q}'A\bar{A}'Q=\mathrm{diag}\{N(\lambda_1),N(\lambda_2),\cdots,N(\lambda_n)\}$以及$A\bar{A}'=I_n$即得$N(\lambda_i)=1$；$i=1,2,\cdots,n$. 证毕.

系5 $n\times n\,\Sigma$斜自共轭阵A至少有n个右特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且$\lambda_i+\bar{\lambda}_i=0$；$i=1,2,\cdots,n$. 又$A$必酉相似于对角阵. $\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

证明 因Σ斜自共轭阵A是广义Σ正规阵，故成立（24）式，于是$0=\bar{Q}'(A+\bar{A}')Q=\mathrm{diag}\{\lambda_1+\bar{\lambda}_1,\lambda_2+\lambda_2,\cdots,\lambda_n+\bar{\lambda}_n\}$; 所以$\lambda_i+\bar{\lambda}_i=0$；$i=1,2,\cdots,n$. 证毕.

定理5 设A是Ω上$n\times n$可Σ化阵，如果A所酉相似的上三角阵的主对角元$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（$\in\Sigma$）满足：

$$\sum_{i,j=1}^{n}N(a_{ij})=\sum_{i=1}^{n}N(\lambda_i)\tag{26}$$

则A必是广义Σ正规阵．其中$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

反之，广义Σ正规阵A的n个右特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$必满足（26）式．

证明 由（19）式与（26）式知，$N(\sigma_{ij})=0$，故$\sigma_{ij}=0$，$\forall i,j$；$1\leq i<j\leq n$．于是成立（24）式，故由定理4知，A是广义Σ正规阵．

反之，由A的广义正规性得到（24）式，于是

$$\bar{Q}'A\bar{A}'Q=\mathrm{diag}\{N(\lambda_1),N(\lambda_2),\cdots,N(\lambda_n)\},$$

再由定理2即得（26）式．证毕．

定理6 如果Ω上$n\times n$可Σ化阵A所酉相似的上三角阵的主对角元$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$满足

$$\sum_{i,j=1}^{n}N(a_{ij}+\bar{a}_{ji})=\sum_{i=1}^{n}N(\lambda_i+\bar{\lambda}_i), \tag{27}$$

则A必是广义Σ正规阵．

反之，广义Σ正规阵A的n个右特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$必满足（27）式．

证明 由（27）式及（20）式即知$\sigma_{ij}=0$，$\forall i,j$；$1\leq i<j\leq n$，故成立（24）式．于是由定理4知，A是广义Σ正规阵．

反之，由于A是广义Σ正规阵，故成立（24）式，由此即得：

$$\bar{Q}'(A+\bar{A}')Q=\mathrm{diag}\{\lambda_1+\bar{\lambda}_1,\lambda_2+\bar{\lambda}_2,\cdots,\lambda_n+\bar{\lambda}_n\},$$

于是

$$\bar{Q}'(A+\bar{A}')^2Q=\mathrm{diag}\{N(\lambda_1+\bar{\lambda}_1),N(\lambda_2+\bar{\lambda}_2),\cdots,N(\lambda_n+\bar{\lambda}_n)\},$$

由上式及定理2即得（27）式．证毕．

注3 在复矩阵论中，我们已给出Schur定理很多方面的应用[6]~[10]．今若能对 中的元素予以某种"赋值",便有可能相应地在Ω上得到Schur定理更多的应用，这将是有趣的．但如何给以恰当的"赋值"?我们还没有完全解决．

参 考 文 献

〔1〕谢邦杰，中国科学，数学专辑Ⅰ（1979），88～93.
〔2〕华罗庚、万哲先，典型群，上海科技出版社，1963.
〔3〕屠伯埙，数学研究与评论，3(1987)，393～403.
〔4〕屠伯埙，数学研究与评论，1(1988)，11～21.
〔5〕屠伯埙，数学年刊，9A:2(1988)，130～138.
〔6〕屠伯埙，复旦学报（自然科学版），4(1982)，416～422.
〔7〕屠伯埙，复旦学报（自然科学版），2(1984)，179～188.
〔8〕屠伯埙，复旦学报（自然科学版），3(1985)，321～331.
〔9〕屠伯埙，复旦学报（自然学报（自然科学版），4(1984)，435～442.
〔10〕屠伯埙，复旦学报（自然科学版），4(1986)，429～435.

Unitary Similarity Theory of Matrices Over the Strong p-Division Ring (Ⅲ)

Tu Boxun

(Fudan University, China)

Abstract

In this third paper, the famous Schur theorem that an $n \times n$ complex matrix is unitary similar to an upper triangular matrix is generalized to the socalled Σ-lizable matrix over the strong p-division ring Ω, where Σ is the algebraically closed extension field of the center of Ω, and $\Sigma \subset \Omega$.

The generalized Schur's identity and other results involving the generalized normal matrix over Ω is obtained by using this generalized Schur theorem.