第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

关于拟平坦模的几个注记*

陈 建 龙

（安徽师范大学数学系，芜湖）

§1. 引 言

本文所有的环均指有单位元的环，模均指酉模. 左R-模M称为拟内射的，如果对任意N<M，N→M的同态都可扩张成M的自同态；对偶地，有拟投射模的概念. 让N为左R-模，M_R称为N-平坦，如果对任意单同态$K\xrightarrow{f}N$，导出映射$1\otimes f$：$M\otimes K\to M\otimes N$为单同态，M_R称为拟平坦的，如果对每一个可除Abel群D，M为M_D^+-平坦，这里$M_D^+=\hom_Z(M,D)$. 关于拟投射、拟内射，我们可参考[1]和[2]，至于拟平坦模可参考[3]和[4].

§2 拟投射(平坦)模的子模

在[5]、[6]和[7]中，Ahsan和Golan分别研究了拟投射模的子模. 证明了：(1) R为左(半)遗传环当且仅当左投射的(*fg*)子模为拟投射(这里"*fg*"表示"有限生成")，(2)如果左拟投射的子模为拟投射，则R的每一个商环为左遗传环，并且当R为左完全环时，其逆也真[7]. 至于拟内射，我们有：R的每一个商环为左遗传当且仅当Π-拟内射的同态象为拟内射模[6]. 本节我们也将考虑拟投射(平坦)的子模. 首先给出几个引理：

引理2.1([8] Th2.3) 若$_{R}M$有投射复盖，则M为拟投射⇔$_{\bar R}M$为投射模. 这里$\bar R=R/\mathrm{ann}M$.

引理2.2([1] 16.12,16.13) 设$0\to M'\to M\to M''\to 0$正合，若N为M-投射，则N为M'、M''-投射；若N为M-内射，则N为M'、M''-内射.

引理2.3([5] 引理3.3) 每一个*fg*R-投射模为投射模.

引理2.4([4] Th3.4) 若M为左R-模，记$\bar R=R/\mathrm{ann}M$，则以下条件等价：

(1) M为拟平坦左R-模；(2) M为平坦左$\bar R$-模；

(3) M^+为Π-拟内射模. 这里$M^+=\hom_Z(M,Q/Z)$.

引理2.5 若R为半完全环，$_{R}M$为*fg*，则M为拟投射⇔M为拟平坦.

证明 若$_{R}M$为*fg*拟投射，则由引理2.1知，$_{\bar R}M$为投射模. 再由引理2.4知，M为拟平坦. 反过来，若M为*fg*拟平坦，则$_{\bar R}M$为*fg*平坦. 另一方面，$\bar R$为半完全环，由[9]知$_{\bar R}M$为投

* 1986年11月24日收到.

射，故M为拟投射．

定理2.6 若R为半完全环，则以下条件等价：

（1） R的每一个商环为左半遗传环；

（2） 任意左fg拟投射的fg子模为拟投射；

（3） 任意左fg拟平坦的fg子模为拟平坦．

证明 （2）$\Leftrightarrow$（3）由引理2.5．

（1）$\Rightarrow$（2） 设$_RN$为fg拟投射模$_RM$的fg子模，记$\bar{R}=R/\mathrm{ann}M$，由引理2.1知$_{\bar{R}}M$为fg投射，另一方面，$\bar{R}$为左半遗传环，故fg子模$_{\bar{R}}M$为投射，因此，$_RN$为拟投射．

（2）$\Rightarrow$（1） 很明显，对每一个R的商环也满足条件（2），这样，我们只要证R为左半遗传即可．设I为R的fg左理想，那么$I\oplus R$为fg拟投射模$R\oplus R$的fg子模，这样由假设知$I\oplus R$为拟投射，由引理2.2，I为R 投射，所以I为投射（引理2.3），从而R为左半遗传环．

推论2.7 若R为左完全环，则以下条件等价：

（1） R的每一个商环为左遗传环；

（2） 拟投射左模的（fg）子模为拟投射；

（3） fg拟投射左模的（fg）子模为拟投射；

（4） 每一个奇异左R-模为内射．

证明 （1）$\Rightarrow$（2）由［7］Th.5.1，（1）$\Leftrightarrow$（4）由［10］Th.c．

（2）$\Rightarrow$（3） 显然，

（3）$\Rightarrow$（1）由定理2.6知R的每一个商环为左半遗传．另一方面，R的每一个商环为左完全环，因此（1）成立．

定理2.8 以下条件等价：

（1） R为左遗传环；

（2） 投射左R-模的子模为拟投射；

（3） 内射左R-模的商模为拟内射；

（4） 每一个左R-模的任两个内射子模的和为拟内射．

证明 （1）$\Rightarrow$（4） 设M_1，M_2为$_RM$的两个内射子模，则$M_1\oplus M_2$的商模M_1+M_2为内射，当然为拟内射．

（4）$\Rightarrow$（3） 设E为内射模，E/N为任一商模，记$Q=E\oplus E$，$K=\{(x,x)\mid x\in N\}\subset Q$，那么$M_1=(E,0)+K\cong E$，$M_2=(0,E)+K\cong E$，且$M_1\cap M_2=N$，由假设知$\overline{Q}=Q/K=M_1+M_2$为拟内射．另一方面，由$M_1$内射知，$M_1\hookrightarrow\overline{Q}$为分裂单同态，故存在$N'$，使得$\overline{Q}=M_1\oplus N'$，所以$N'$为拟内射，而$E/N\cong M_2/M_1\cap M_2\cong M_1+M_2/M_1\cong\overline{Q}/M_1\cong N'$，这样E/N为拟内射．

（3）$\Rightarrow$（1） 设$Q\to M\to 0$任一正合列，这里Q为内射模，因此得到正合列$Q\oplus E(R)\to M\oplus E(R)\to 0$，这样，$M\oplus E(R)$为拟内射，但$R\hookrightarrow M\oplus E(R)$，由引理2.2知，M为内射模，从而R为左遗传环．

（1）$\Leftrightarrow$（2）由［7］得．

现在我们考虑拟平坦模的子模．Ahsan在[3]中证明了：若R为可换环，则R为正则环当且仅当拟平坦模的子模为拟平坦模（［3］Th4.6），而且他问：是否正则环的这一特征对非可

换环成立.

对于这个问题，我们的回答是：当R为非可换环时，这个"特征"未必成立. 例：取R为遗传，Noether，右整环，且每一个单模为内射(Cozzens[11])，那么根据Boyle[12]，这种环为右QI-环，即右拟内射模为内射. 另一方面，又R为右遗传环，所以每一个拟内射右模的商模为拟内射，由引理2.4知，拟平坦左模的子模为拟平坦. 但R不是正则环.

进一步地，可以给出拟平坦模子模为拟平坦的刻划.

定理2.9 以下条件等价：

(1) $wD(R/I)\leqslant 1$，对任意$I\triangleleft R$；

(2) 每一个拟平坦左模的(fg)子模为拟平坦；

(3) 每一个fg拟平坦左模的(fg)子模为拟平坦.

证明 假设fg拟平坦的fg子模为拟平坦，则由[3]引理4.3知：R的每一个商环满足这个假设，所以我们只要证$wD(R)\leqslant 1$. 设I为R的fg左理想，那么，$I\oplus R$为fg拟平坦模$R\oplus R$的fg子模，因此，$I\oplus R$为拟平坦，但$R\to I\oplus R$，故I为平坦模(引理2.4)，这样，$wD(R)\leqslant 1$.

反过来，设N为拟平坦左模M的子模，让$\bar{R}=R/\mathrm{ann}M$，那么M为平坦左$\bar{R}$-模，由$wD(\bar{R})\leqslant 1$知，${}_{\bar{R}}N$为平坦，这样，${}_{R}N$为拟平坦.

推论2.10 ([3]Th4.7) 若R为右Noether环，则fg拟平坦右模的子模为拟平坦，当且仅当R的每一个商环为右遗传环.

注 由定理2.9的证明可知：$wD(R)\leqslant 1\Leftrightarrow$左平坦R-模的($fg$)子模为拟平坦模.

§3 拟平坦模为平坦模的环

Ahsan在[3]中定义了广义右QI-环，即每一个右拟内射模为上平坦(f-内射)，并且证明了：若R为可换环，则R为正则环$\Leftrightarrow$R为广义右QI-环. 这里我们推广这个结果.

定理3.1 若R为可换环，则以下等价：

(1) R为正则环；(2) 每一个拟平坦模为平坦模.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 显然，

(2)$\Rightarrow$(1) 由于R为可换环，则对任意理想I为R的全不变子模，因此R/I为拟投射R-模[7]. 我们可证：当R可换环时，fg拟投射模为拟平坦. 事实上，若M为fg拟投射，那么，$M_{\bar{R}}$为fg拟投射忠实模，这里$\overline{R}=R/\mathrm{ann}M$，由[13]prop.3.28知，$\bar{R}\hookrightarrow M_{\bar{R}}^{(n)}$，容易知$M_{\bar{R}}^{(n)}$为拟投射，故$M_{\bar{R}}^{(n)}$为$\bar{R}$-投射，但$M_{\bar{R}}^{(n)}$为$fg$，故由引理2.3知$M_{\bar{R}}$为投射(平坦)，故M为拟平坦. 这样，每一个循环模R/I为拟平坦，由假设知R/I为平坦，因此，R为正则环.

推论3.2 [3,Th3.11] 若R为可换环，则以下条件等价：

(1) R为正则环；

(2) R为广义QI-环；

(3) Π-拟内射模为fp-内射.

推论3.3 若R为可换环，则R为QI-环$\Leftrightarrow$R为半单环.

证明 只要注意到QI-环为Noether环即得.

注 Cozzen[11] 提供了右QI-环(当然左拟平坦模为平坦)，但不是正则环的例子. 因此，

定理3.1对非交换环不成立.

定理3.4 若R为左内射环，则以下条件等价:

（1） R为正则环;

（2） 左拟内射模为fp-内射模.

证明 设I为R的本质左理想，那么由R为左内射环，知E(I)=R，这样$\Lambda I=I$，这里$\Lambda=\mathrm{End}E(I)\cong R$，由[2]19.2知，I为拟内射模，从而I为$fp$-内射，故$0\to I\to R\to R/I\to 0$为纯正合列，因此，R/I为平坦模. 对$\forall T<_R R$，易知存在一个左理想K，使得$T\cap K=0$，且$T\oplus K$为R的本质左理想，从而$R/(T\oplus K)$为平坦模，所以对$\forall M_R$，$M\otimes(T\oplus K)\to M\otimes R$为单同态，结合单同态，$M\otimes T\to M\otimes(T\oplus K)$知，$M\otimes T\to M\otimes R$为单，这样，M为平坦模. 也就是说，R为正则环. 反之显然.

注 我们不知道当把(2)改成拟平坦右模为平坦时，定理3.4是否成立. 但我们易知，若拟平坦右R-模为平坦，则R的每一个商环也有这一性质，且拟平坦右模为平坦当且仅当(两个)拟平坦右模的直和为拟平坦. 另一方面，由R为半单环⇔右拟投射模为投射模，知R为半单环⇔R为右完全环，且右拟平坦模为平坦.

这一节最后，我们将给出[3]中Th.5.3、Th.5.6的完备形式.

命题3.5 以下条件等价:

（1） R为左半遗传环;

（2） 无挠右模为平坦模;

（3） 无挠右模为拟平坦模.

证明 （1）⇒（2）注意到左半遗传⇔左Coherent环,且$WD(R)\leqslant 1$,（2）⇒（3）显然.

（3）⇒（1） 首先由于R_R^X为无挠模，R^X为拟平坦. 但$R\hookrightarrow R^X$，所以R^X为平坦，即R为左coherent环. 其次，$\forall I$为R的右理想，那么$I\oplus R$为无挠模，从而为拟平坦，又$R\hookrightarrow I\oplus R$，I为平坦，这样，$wD(R)\leqslant 1$，所以R为左半遗传环.

命题3.6 以下条件等价:

（1） R为右遗传，右完全环，左coherent环;

（2） R为左半遗传，右完全环;

（3） 无挠右R-模为(拟)投射.

证明 （3）⇒（1） 由[3]Th.5.6知，R为右完全环，左coherent，且右半遗传，因而R为右遗传环.

（1）⇒（3） 由R为右完全，左coherent环知，R_R^X为投射模，$\forall$集X，这样，R^X的每一个子模(即无挠模)为投射模（R为右遗传环).

（2）⇔（3）由命题3.5.

用同样方法可证:

命题3.7 R为半单环⇔无挠右模为(拟)内射模.

作者感谢导师唐怀鼎先生的指导.

参 考 文 献

[1] Anderson, F. W, & Fuller, K. R., Ring and Categeries of Modules, Springer-Verlag New York Inc., 1974.

[2] Faith, C., Algebra II Ring Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.

[3] Ahsan, J. and Ibrahim, Comm. algebra, 10(1982), 9; 887—912.

[4] Hill, D. A., J. Australian Math. Soc., 18(1974), 2; 170—181.

[5] Ahsan, J., Comm. algebra, 9(1981), 9; 975—988.

[6] Ahsan, J., Comm. algebra, 10(1982), 2; 1359.

[7] Golan, J.S., Proc. A. M. S., 28(1971), 2; 337—343.

[8] Fuller, K. R., Arch. Math., 20(1969), 495—502. 21(1970), 478.

[9] Fieldhouse, D.J., Can. J. Math., 23(1971), 4; 608—610.

[10] Golan, J.S., Proc. A. M. S., 31(1972), 2; 401—408.

[11] Cozzens, J.H., Bull. A. M. S., 76(1970), 75—79.

[12] Boyle, A. K., Trans. A. M. S., 192(1974), 115—120.

[13] Faith, C., Algebra I Rings, Modules, and Categories, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981.

Some Remarks of Quasi-flat Modules

Chen Jianlong

(Anhui Normal University, Wuhu)

Abstract

In this paper, we solve Ahsan's problem provided in [3], that is, whether the characterization of commutative regular ring as each submodule of quasi-flat module is quasi-flat is true in the noncommutative case.

In §3, we proved that Th3.1. Let R is commutative ring, then R is regular ring iff every quasi-flat module is flat. As a consequently, if R is commutative ring, then R is regular ring iff R is generalized QI-ring([3, Th.3.11, Th.3.4]); if R is left self-injective ring, then R is regular ring iff every left quasi-injective module is *fp*-injective.