第9卷 第1期
1989年 2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

切于已知球的单形宽度*

毛其吉 左铨如

（扬州师范学院数学系）

在 n 维欧氏空间 E^n 中，一个有界凸体K的宽度是这样定义的：对于每个单位向量 u，将K的一对与 u 垂直的支撑超平面之间的距离记作 $\tau(K, u)$，令

$$w(K)=\min_u \tau(K, u) \qquad (1)$$

我们将 $w(K)$ 叫做K的宽度.

Sallee在1974年提出猜测说[1],"内接于球的所有单形中，正则单形具有最大宽度"，随后，这个猜测被R. Alexander所证实[2].

文献〔3〕证明了比Sallee-Alexander定理更强的结果："一切维数相同体积相等的单形中，正则单形具有最大宽度"即如以 $V(\Delta_n)$ 表示 n 维单形 Δ_n 的体积，在文〔3〕中证明了

$$w(\Delta_n)\leq C_n V(\Delta_n)^{1/n} \qquad (2)$$

这里 C_n 是仅与维数 n 有关的绝对常数，其中等号当且仅当 Δ_n 为正则单形时成立. 不等式(2)蕴含了

$$w(\Delta_n)\leq \alpha_n R(\Delta_n) \qquad (3)$$

这儿的 $R(\Delta_n)$ 表示单形 Δ_n 的外接球半径，而 α_n 仍表示维数常数.

本文考虑一个相似的问题，即将不等式(3)中的 $R(\Delta_n)$ 改为 $r(\Delta_n)$，这里的 $r(\Delta_n)$ 表示单形 Δ_n 的内切球半径，能否建立不等式

$$w(\Delta_n)\leq \beta_n r(\Delta_n)$$

其中的 β_n 是一个维数常数，回答是肯定的，即我们证明了

定理1 如果 $w(\Delta_n)$ 和 $r(\Delta_n)$ 分别表示 n 维单形的宽度和内切球半径，则有

$$w(\Delta_n)\leq \beta_n r(\Delta_n) \qquad (4)$$

其中 $\beta_n=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{1/2}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{1/2}}$ 而且(4)中的等号当 Δ_n 是正则单形时可以取到.

作为定理1的一个重要推论，可以得出

定理2 外切于一已知球的所有单形中，正则单形具有最大的宽度.

定理1的证明 用 $\tau(\Delta_n, u)$ 表示单形 Δ_n 在方向 u 的宽度. 设 n 维单形 Δ_n 的顶点之集为 $S=\{P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}\}$，则对S的每个非空的、不同于S的子集A，必存在一个定向超平面

* 1986年5月29日收到.

H，使得S\A⊂H，而且，A中的各点到H有相等的带号距离．如以v记H的法向量，则这个带号距离的绝对值，就是$\tau(\varDelta_n, v)$．

于是，如果令$I=\{1,2,\cdots,n+1\}$是开始的$n+1$个正整数的集合．I的一切m元子集所组成的集合记为θ_m．

$$\theta_m=\{\sigma\mid\sigma\in I,\quad |\sigma|=m\} \tag{5}$$

$|\sigma|$表示集σ的元素的个数．这样，单形$\varDelta_n$的顶点集$S=\{P_1, P_2, \cdots, P_{n+1}\}$的每个子集$S_\sigma$可以和I的一个子集$\sigma$对应：$S_\sigma=\{P_a\mid a\in\sigma,\ \sigma\subset I\}$ 对S_σ，当$1\leq|\sigma|\leq n$时，存在一个定向超平面H_σ、$S\backslash S_\sigma\subset H_\sigma$，使得$S_\sigma$中的一切点到$H_\sigma$的带号距离相等，若以$v_\sigma$记$H_\sigma$的单位法向量，则当$\varDelta_n$取定时，$\tau(\varDelta_n, v_\sigma)$仅与$\sigma$有关，故可记作$\tau_\sigma=\tau(\varDelta_n, v_\sigma)$．

对n维单形$\varDelta_n$，有[3] $w(\varDelta_n)=\min\limits_{\substack{\sigma\subset I\\ \phi\neq\sigma\neq I}}\{\tau_\sigma\}$，这里$w(\varDelta_n)$表$\varDelta_n$之宽度，$I=\{1,2,\cdots,n+1\}$．

对$m=1,2,\cdots,n$．记$D_m=\sum\limits_{\sigma\in\theta_m}\tau_\sigma^{-2}$ 这里θ_m由（5）给出，则有[3]

$$D_m=\binom{n-1}{m-1}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)}{n^2V(\varDelta_n)},$$

这里的$V(F_i)$表n维单形$\varDelta_n$各侧面F_i的（$n-1$）维体积，$V(\varDelta_n)$表$\varDelta_n$的体积．

对一切$\sigma\in\theta_m$，计算τ_σ^{-2}的算术平均$\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})$得

$$\begin{aligned}\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})&=\binom{n+1}{m}^{-1}D_m=\binom{n-1}{m-1}\Big/n^2\binom{n+1}{m}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)/V^2(\varDelta_n)\\&=\frac{m(n+1-m)}{n^3(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)/V^2(\varDelta_n)\\&=\frac{m(n+1-m)}{(n+1)}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)/r^2(\varDelta_n)\Big(\sum_{i=1}^{n+1}V(F_i)\Big)^2.\end{aligned}\tag{6}$$

显然当$m=\left[\frac{n+1}{2}\right]$时，（6）式右端取到最大值，即$\max\limits_{1\leq m\leq n}\{\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})\}=\underset{|\sigma|=[\frac{n+1}{2}]}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})$，而$w(\varDelta_n)=\min\limits_{\substack{\sigma\subset I\\ \phi\neq\sigma\neq I}}\{\tau_\sigma\}=\min\limits_{0<|\sigma|\leq n}\{\tau_\sigma\}$，故$w^{-2}(\varDelta_n)=\max\limits_{0<|\sigma|\leq n}\{\tau_\sigma^{-2}\}\geq\underset{|\sigma|=[\frac{n+1}{2}]}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})$．从而

$$\begin{aligned}w^{-2}(\varDelta_n)&\geq\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)/n(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)/r^2(\varDelta_n)\Big(\sum_{i=1}^{n+1}V(F_i)\Big)^2\\&\geq\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)/n(n+1)^2r^2(\varDelta_n),\end{aligned}$$

所以$w(\varDelta_n)\leq\left((n+1)\sqrt{n}\right)\left[\frac{n+1}{2}\right]^{1/2}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{1/2}\cdot r(\varDelta_n)$．

显然，当单形为正则单形时，等号成立．定理1证毕．

参考文献

〔1〕Guy, R.K., Problems, Lecture Notes in Math., 490, The Geometry of Metric and Linear Spaces, Springer-Verlag, 1975, pp233—244.

〔2〕Alexander, R., Geometriae Dedicata, 6: 1(1977), 87—94.

〔3〕杨路、张景中，数学学报，26：4(1983), 488—493.

The Width of Simplex with Its Faces Contacted with the Given Sphere

Mao Qiji Zuo Quanru

(Department of Mathematics, Yangzhou Teacher's College)

Abstract

Let $w(\Delta_n)$ denote the width of a non-degenerate simplex Δ_n in E^n and $r(\Delta_n)$ denote the inradius of the simplex. Then, in this paper, we prove the inequlity as below:

Theorem: $$w(\Delta_n) \leq \beta_n r(\Delta_n)$$

where $$\beta_n = \frac{n^{1/2}(n+1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{1/2}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{1/2}}$$

The equality holds if and only if the simplex is regular.