第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITIOH

Vol.9 No.1
Feb. 1989

E^n中的正弦定理及应用

刘根洪

（苏州大学数学系）

§1 E^n中的正弦定理

为行文方便，先约定一些记号，并引进单形顶点角的定义.

设$\mathscr{C}$为E^n中的n维单形，$\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$为$\mathscr{C}$的顶点集.

记$x^{(j)}=\overline{P_0P_j}$ $(j=1,\cdots,n)$，$V=|\det(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})|=\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})^{1/2}$表示以$n$个矢量$x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$为边作出$n$维的平行$2n$面体的体积（或由$\mathscr{C}$的顶点集$\mathscr{S}=\{P_0,\cdots,P_n\}$所支撑的平行多面积的体积），$V_i=|\det(x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})|=\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})^{1/2}$表示以$n-1$个矢量$x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)}$为边作出$n-1$维的平行$2(n-1)$面体的体积（或由顶点集$\mathscr{S}_i=\{P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$所支撑的平行多面体的体积）$(i=0,1,\cdots,n)$，其中$\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$是矢量$x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$的Gram行列式．$v=\frac{1}{n!}V$，$v_i=\frac{V_i}{(n-1)!}$分别表示$n$维单形$\mathscr{C}$和$n-1$维单形$(P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n)$的体积$(i=0,1,\cdots,n)$，$\rho_{ij}=|\overline{P_iP_j}|$表示一维单形$(P_i,P_j)$的棱长，$L(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$表示$E^n$中由矢量$x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$所生成的子空间.

关于单形顶点角的概念

定义 设$\mathscr{C}$是E^n中的n维单形，$\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_n$分别是$\mathscr{C}$的$n+1$个界面上的单位法矢量，记$D_i=\det(\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n)$，这时我们称$\alpha_i=\arcsin|D_i|$为$\mathscr{C}$的第$i$个界面所对应的顶点角.

根据单形顶点角的定义，可得下列命题：

命题 设α_i为E^n中n维单形$\mathscr{C}$的第i个界面所对应的顶点角，V是由顶点集$\mathscr{S}=\{P_0,\cdots,P_n\}$所支撑的平形多面体的体积，$V_i$是第$i$个界面的顶点集$\{P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$所支撑的$n-1$维平行多面体的体积．则 $\sin\alpha_i=V^{n-1}\Big/\prod\limits_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}V_j$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

证明 在E^n中取定正交坐标系，并设$e_1,e_2,\cdots,e_n$分别表示在$x_1,x_2,\cdots,x_n$轴方向的单位矢量．于是E^n中向量$\overline{P_0P_i}=x^{(i)}$可唯一表示为

* 1986年8月13日收到.

$$x^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\ (i=1,2,\cdots,n),\ a_{ij}\in\mathbf{R}.$$

由格拉斯曼(Grassmann)代数可知:

$$x^{(1)}\wedge x^{(2)}\wedge\cdots\wedge x^{(i-1)}\wedge x^{(i+1)}\wedge\cdots\wedge x^{(n)}$$

$$=\sum_{1<j_1<j_2<\cdots<j_{i-1}<j_{i+1}<\cdots<j_n<n}\begin{vmatrix}a_{1j_1}&\cdots&a_{1j_{i-1}}&a_{1j_{i+1}}&\cdots&a_{1j_n}\\a_{2j_1}&\cdots&a_{2j_{i-1}}&a_{2j_{i+1}}&\cdots&a_{2j_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{nj_1}&\cdots&a_{nj_{i-1}}&a_{nj_{i+1}}&\cdots&a_{nj_n}\end{vmatrix}e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_{i-1}}\wedge e_{j_{i+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}.$$

记A_{ik}为$\det(a_{ij})$中元素a_{ik}的代数余子式$(i,k=1,2,\cdots,n)$,此时可得

$$V_i=|\det(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})|=\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^2\right)^{1/2}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

再令$\varepsilon_i=\overline{x_i}/|\overline{x_i}|$, $\overline{x_i}=\sum_{j=1}^{n}x_i^je_j$, 且$\langle x^{(j)},\overline{x_i}\rangle=0$　　$(j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$

则可解得$\varepsilon_i=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}e_k/\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2\right)^{1/2}\ (i=0,1,\cdots,n)$.所以

$$\sin\alpha_0=|\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)|=\left(1/\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2\right)^{1/2}\right)\left|\det\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\right|=V^{n-1}/\prod_{i=1}^{n}V_i\quad.$$

类似地可证得 $\sin\alpha_i=V^{n-1}/\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}^{n}V_j\ (i=1,2,\cdots,n)$. 从而命题得证.

由上述命题易得E^n中的正弦定理1.

正弦定理1　设V是E^n中n维单形$\mathscr{C}$的顶点集$\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$所支撑的平行多面体的体积,$V_i$为由顶点集$\mathscr{S}_i=\{P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$所支撑的$n-1$维单形的平行多面体的体积,$\alpha_i$为$\mathscr{C}$的第$i$个界面所对应的顶点角$(i=0,1,\cdots,n)$,则

$$\frac{\sin\alpha_0}{V_0}=\frac{\sin\alpha_1}{V_1}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{V_n}=\frac{V^{n-1}}{\prod_{i=0}^{n}V_i},\tag{1}$$

$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0}=\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{v_n}=\frac{(nv)^{n-1}}{(n-1)!\prod_{i=0}^{n}v_i},\tag{1$'$}$$

(1)或(1)′的证明是显见的,从略.

在(1)或(1)′中,若令$n=2$.则便得通常E^2中的三角形正弦定理

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin A}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

正弦定理2 设$\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$为$n$维单形$\mathscr{C}$的顶点集,$\theta_{ij}$是$\mathscr{C}$的两个$n-1$维单形$(P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n)$, $(P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{j+1},\cdots,P_n)$所成之角.又设$\beta_{0i}$是$n-1$维

单形$(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{i-1}, \mathrm{P}_{i+1}, \cdots, \mathrm{P}_n)$的第 i 个界面所对应的顶点角$(i=1,2,\cdots,n)$．则

$$\frac{\sin\beta_{0n}}{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-1}}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-2}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-2}}\sin\theta_{ij}}=\cdots=\frac{\sin\beta_{01}}{\prod\limits_{2\le i<j\le n}\sin\theta_{ij}}. \qquad (2)$$

为证明定理2，需要下面两个引理：

引理1 设$(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x)$为$E^n$中的$m+1$维单形，$y$是子空间$\mathrm{L}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$的任一矢量，再由矢量$x$的末端P向$\mathrm{L}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$作正投影，其高长和垂足依次记为$h$、$N$．则
$$h^2=\langle\overline{\mathrm{NP}},\overline{\mathrm{NP}}\rangle=\frac{\Gamma(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)},x)}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})},$$
且斜高$|x-y|\geqslant h$．

证明 首先证明矢量x可表示为：$x=x_S+x_N$，$x_S\in\mathrm{L}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})\perp x_N$．

这里矢量x_S为x在$\mathrm{L}(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$上的正投影，$x_N=\overline{\mathrm{NP}}$为射出矢量．将$x_S$表示为$x_S=\sum\limits_{i=1}^{m}c_ix^{(i)}$，$c_i\in\mathrm{R}$．由正交性，得$\langle x-x_S,x^{(j)}\rangle=0$，即

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\langle x^{(j)},x^{(i)}\rangle=\langle x,x^{(j)}\rangle\quad(j=1,2,\cdots,m).$$

从上面方程组可解得

$$x_S=-\frac{\begin{vmatrix}\boxed{\Gamma} & \begin{matrix}x^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(m)}\end{matrix}\\ \langle x,x^{(1)}\rangle\cdots\langle x,x^{(m)}\rangle & 0\end{vmatrix}}{\Gamma}$$

$$x_N=x-x_S=\frac{\begin{vmatrix}\boxed{\Gamma} & \begin{matrix}x^{(1)}\\ \vdots\\ x^{(m)}\end{matrix}\\ \langle x,x^{(1)}\rangle\cdots\langle x,x^{(m)}\rangle & x\end{vmatrix}}{\Gamma}$$

所以

$$h^2=\langle x_N,x_N\rangle=\langle x_N,x-x_S\rangle=\langle x_N,x\rangle=\frac{\begin{vmatrix}\boxed{\Gamma} & \begin{matrix}\langle x^{(1)},x\rangle\\ \vdots\\ \langle x^{(m)},x\rangle\end{matrix}\\ \langle x,x^{(1)}\rangle\cdots\langle x,x^{(m)}\rangle & \langle x,x\rangle\end{vmatrix}}{\Gamma}$$

即

$$h^2=\frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x)}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})}.$$

又因为$\langle x-y,x-y\rangle=\langle x_N+(x_S-y),x_N+(x_S-y)\rangle=\langle x_N,x_N\rangle+\langle x_S-y,x_S-y\rangle\geqq\langle x_N,x_N\rangle=h^2$，所以$|x-y|\geqslant|x-x_S|=h$，即由$x$的末端到$m$维单形$(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$的高长不大于其斜高之长．

引理2 设两个m维单形$(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_{m-1},\mathrm{P}_m)$与$(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_{m-1},\mathrm{P}_{m+1})$的交角为$\theta$，而$m\leqslant n-1$．则

$$\sin\theta=\frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x^{(m+1)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})^{1/2}}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m+1)})^{1/2}}.$$

证明 由矢量$x^{(m+1)}$的末端P_{m+1}分别向子空间：$L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})$和$L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)})$作正投影，其高和垂足依次记为$h, h'$；N, N′. 并记$\theta=\angle P_{m+1}NN'$. 因为$L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})=L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)})\cap L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m+1)})$，所以$\overline{NN^1}\perp L(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})$. 且$\sin\theta=|\overline{P_{m+1}N^1}|/|\overline{P_{m+1}N}|=h'/h$.

在引理1中，置$x=x^{(m+1)}$，则分别可得

$$h'^2=\frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x^{(m+1)})}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m)})},\qquad h^2=\frac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m+1)})}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})},$$

故 $\sin\theta=\dfrac{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x^{(m+1)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})^{1/2}}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m+1)})^{1/2}}$（由引理1，可知$\sin\theta\leqslant1$）.引理证毕.

图1给出了在E^3中求三维单形（P_0, P_1, P_2, P_3）中的两个二维单形（P_0, P_1, P_2）与（P_0, P_1, P_3）间交角θ的示意图.

现回到定理2的证明.

应用定理1和引理2可得下列n个等式：

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0n}\prod_{j=1}^{n-1}\sin\theta_{jn},$$

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0,n-1}\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_{j,n-1},$$

……

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0,1}\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_{j,1}.$$

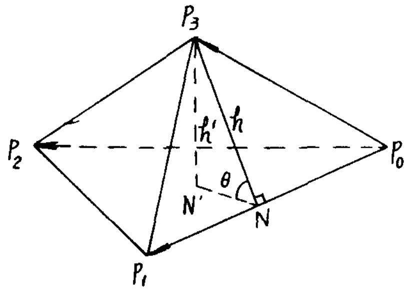

图 1

从上面n个等式，便可得E^n中的球面三角正弦定理：

$$\frac{\sin\beta_{0n}}{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-1}}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-2}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-2}}\sin\theta_{ij}}=\cdots=\frac{\sin\beta_{01}}{\prod\limits_{2\le i<j\le n}\sin\theta_{ij}}$$

作为定理2的特殊情况，当$n=3$时，对于四面体P_0-$P_1P_2P_3$，则有

$$\frac{\sin\beta_{03}}{\sin\theta_{12}}=\frac{\sin\beta_{02}}{\sin\theta_{13}}=\frac{\sin\beta_{01}}{\sin\theta_{23}}$$

这就是通常球面三角中的正弦定理. 这里$\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$分别是平面$P_0P_1P_3$, $P_0P_2P_3$；$P_0P_1P_2$, $P_0P_2P_3$；$P_0P_1P_2$, $P_0P_1P_3$ 间的交角. 而$\beta_{03}=\angle P_1P_0P_2$, $\beta_{02}=\angle P_1P_0P_3$, $\beta_{01}=\angle P_2P_0P_3$（见图1）.

§Ⅰ E^n 中正弦定理Ⅰ的应用

为阐明定理1的应用，需用到下述重要命题，称它为正弦性质定理.

正弦性质定理 在定理1的假设条件下，有：

$$\sum_{i=0}^{n}\sin^2\alpha_i\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^n. \qquad (3)$$

证明 欲证（3）式成立，只需证明不等式：

$$\sum_{i=0}^{n} v_i^2 / \prod_{i=0}^{n} v_i^2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n-1)!^2}{(nv)^{2(n-1)}} \text{ 成立即可.}$$

设 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的顶点集为 $\mathscr{S}=\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$，顶点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 赋予的质量分别为 m_1，$m_2, \cdots, m_{n+1}$．今任取 $\mathscr{S}$ 中的 $k+1$ 个顶点 $P_{i0}, P_{i1}, \cdots, P_{ik}$．将其所支撑的 k 维单形的体积记为 $v_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ 再令

$$M_k = \sum_{i_0 < i_1 < \cdots < i_k} \sum \cdots \sum m_{i_0} m_{i_1} \cdots m_{i_k} v_{i_0 i_1 \cdots i_k}^2 \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n+1} m_i \quad (m_i > 0),$$

则有 $\dfrac{M_k^l}{M_l^m} \geqslant \dfrac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}(n! M_0)^{l-k}$ $(1<k<l<n)$，等号当且仅当 $\mathscr{S}$ 的密集椭球为球时成立（参见文献[3]）．

今在上式中取 $k=n-1, l=n$，$m_1=v_0^2$，$m_2=v_1^2$，…，$m_{n+1}=v_n^2$，则有

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{n} v_{i_0}^2 v_{i_1}^2 \cdots v_{i_{n-1}}^2 \cdot v_i^2\right)^n}{(v_0^2 \cdot v_1^2 \cdots v_n^2 \cdot v^2)^{n-1}} \geqslant \frac{(n!^3)^{n-1}}{[(n-1)!^3]^n} \left(n! \sum_{i=0}^{n} v_i^2\right).$$

不妨设 $v_{ij} \neq v_i$ $(0 \leqslant j \leqslant n-1)$，则上式也就是

$$\left[(n+1)\prod_{i=0}^{n} v_i^2\right]^n \Big/ \left[\prod_{i=0}^{n} v_i^2 v^2\right]^{n-1} \geqslant \frac{n^{3n-2}}{(n-1)!^2} \left(\sum_{i=0}^{n} v_i^2\right),$$

即

$$\prod^{n} v_i^2 / v^{2(n-1)} \geqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n^{2(n-1)}}{(n-1)!^2} \left(\sum_{i=0}^{n} v_i^2\right).$$

从而得

$$\sum^{n} v_i^2 / \prod_{i=0}^{n} v_i^2 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n-1)!^2}{(nv)^{2(n-1)}}.$$

由正弦定理及正弦性质定理可得以下推论：

推论 1 设 $S(n)$ 是 E^n 中所有 n 维单形所成之集，一单形 $\mathscr{C}$ 的体积和它的 $n+1$ 个 $n-1$ 维单形的体积分别用 $v(\mathscr{C})$，$v_i(\mathscr{C})$ 表示，顶点角用 $a_i(\mathscr{C})$ 表示，则有

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{i=0}^{n} \sin^2 a_i = e$$

推论 2 设 v 和 v_i $(i=0,1,\cdots,n)$ 依次是 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积及 $n-1$ 维单形的体积，则

$$v \leqslant \sqrt{1+n}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{1/[2(n-1)]} \left(\prod_{i=0}^{n} v_i\right)^{n/[(n^2-1)]} \tag{4}$$

证明 利用正弦定理 1 中的（1）′式和正弦性质定理中的（3）式可得：

$$\sum_{i=0}^{n} \sin^2 a_i = \frac{(nv)^{2(n-1)} \sum_{i=0}^{n} v_i^2}{(n-1)!^2 \prod_{i=0}^{n} v_i^2} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

再根据算术——几何平均值不等式，又有

$$(n+1)\left(\prod_{i=0}^{n} v_i\right)^{2/(n+1)} \leqslant \sum_{i=0}^{n} v_i^2 .$$

从上面两个不等式可得

$$\frac{(nv)^{2(n-1)}}{(n-1)!^2}(n+1)\frac{\left(\prod_{i=0}^{n} v_i\right)^{2/[(n+1)]}}{\prod_{i=0}^{n} v_i^2} \leqslant \frac{(nv)^{2(n-1)}\sum_{i=0}^{n} v_i^2}{\prod_{i=0}^{n} v_i^2} \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

故

$$v \leqslant \sqrt{1+n}\left(\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right)^{1/[2(n-1)]}\left(\prod_{i=0}^{n} v_i\right)^{n/(n^2-1)} .$$

推论 3 设 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积为 v，它的诸高线之长为 h_i（$i=0,1,\cdots,n$），则

$$v \geqslant \frac{1}{n!}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right]^{1/2}\prod_{i=0}^{n} h_i^{n/(n+1)} . \tag{5}$$

推论 4 设 v 和 r 顺次为 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积和内切球半径，则

$$r \leqslant \left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n-1}}\right]^{1/(2n)} v^{1/n} \tag{6}$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathscr{C}\in S(n)} \frac{r(\mathscr{C})}{v(\mathscr{C})^{1/n}} = \frac{1}{e} .$$

1970年时，D.Veljaa猜测 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积 v 与它的诸棱之长应满足下列推论中的关系：

推论 5 设 v 和 ρ_{ij} 是 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积和诸棱之长，则

$$n!\,v \leqslant \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{1/2}\prod_{0\leq i<j\leq n}\rho_{ij}^{2/(n+1)} . \tag{7}$$

不等式（7）已在1974年时被Korchmaros 所证明[4].

附记 以上诸推论中，当且仅当 $\mathscr{C}$ 为正则单形时等号成立.

下面我们给出涉及两个 n 维单形的某些几何量所满足的不等式. 需用到以下引理.

引理 3 设 $\mathscr{P}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 是 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的顶点集，R 是单形 $\mathscr{C}$ 的外接球半径，$\rho_{ij}=|\overline{P_iP_j}|$ 为 $\mathscr{C}$ 的棱长（$i,j=0,1,\cdots,n$），并约定 $i=j$ 时，$\rho_{ij}=0$. 则

$$\sum_{0\leq i<j\leq n}\sum \rho_{ij}^2 \leqslant (n+1)^2R^2 .$$

上式等号成立的充要条件是 $\mathscr{C}$ 的球心O与其重心G相重合.

引理 4 设O与G分别是单形 $\mathscr{C}$ 的球心和重心，$\mathscr{P}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 的顶点集，则

$$\sum_{i=0}^{n}\overline{GP}_i^2=(n+1)(R^2-\overline{OG}^2), \tag{③}$$

其中 R 是 $\mathscr{C}$ 的外接球半径.

引理 3 与 4 的证明是简单的，从略.

推论 6 设 ρ_{ij}，R，r 与 ρ_{ij}'，R'，r' 分别是两个 n 维单形 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的棱长、外接球半径、内切球半径. 则

$$n^2(n+1)^2rr' \leqslant \sum_{0\leq i<j\leq n}\rho_{ij}\cdot\rho_{ij}' \leqslant (n+1)^2RR' \tag{8}$$

证明 利用Cauchy不等式和引理3，知

$$\sum_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}\cdot\rho'_{ij}\leqslant\Big(\sum_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}^2\cdot\sum_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}'^2\Big)^{1/2}\leqslant(n+1)^2RR'$$

再利用算术—几何平均值不等式及推论5与推论4可得

$$\sum_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}\cdot\rho'_{ij}\geqslant\frac{n(n+1)}{2}\Big(\prod_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}\cdot\prod_{0\le i<j\le n}\rho'_{ij}\Big)^{2/[n(n+1)]}$$

$$\geqslant\frac{n(n+1)}{2}n!^{2/n}v^{1/n}v'^{1/n}\Big(\frac{2^n}{n+1}\Big)^{1/n}\geqslant\frac{n(n+1)}{2}n!^{2/n}\Big(\frac{2^n}{n+1}\Big)^{1/n}\Big[\frac{n^n(n+1)^{n+1}}{n!^2}\Big]^{1/n}rr'$$

$$=n^2(n+1)^2rr',$$

从而
$$n^2(n+1)^2rr'\leqslant\sum_{0\le i<j\le n}\rho_{ij}\cdot\rho'_{ij}\leqslant(n+1)^2RR'\ .$$

推论7 设G是n维单形$\mathscr{C}$的重心，$\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$是$\mathscr{C}$的顶点集，$P_jG$交单形$\mathscr{C}$的外接球面$S^{n-1}$于$P'_j(j=0,1,\cdots,n)$，$\mathscr{C}'=\{P'_0,P'_1,\cdots,P'_n\}$，则

$$v'\geqslant v\ , \tag{9}$$

其中v，v'依次表示$\mathscr{C}$与$\mathscr{C}'$的体积．

证明 用v_i, v'_i分别表示n维单形$(G,P_0,\cdots,\hat{P}_i,\cdots,P_n)$与$(G,P'_0,\cdots,\hat{P}'_i,\cdots,P_n)$的体积$(i=0,1,\cdots,n)$．重复应用$E^n$中的正弦定理1，则可得

$$\frac{v'_i}{v_i}=\frac{|\overline{GP}_i|}{|\overline{GP'_i}|}\prod_{j=0}^{n}\frac{|\overline{GP'_j}|}{|\overline{GP}_j|}$$

利用圆幂定理 $|\overline{GP}_i|\cdot|\overline{GP'_i}|=R^2-\overline{OG}^2=\lambda$（这里O，$R$为$S^{n-1}$的球心和半径），上式可以写成$\dfrac{v'_i}{v_i}=\lambda^n\overline{GP}_i^2\Big/\prod_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2$．因为G是$\mathscr{C}$的重心，所以有$v_i=\dfrac{v}{n+1}(i=0,1,\cdots,n)$，故

$$v'=\sum_{i=0}^{n}v'_i=\frac{\lambda^n\sum_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}{(n+1)\prod_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}\ ,\ \text{或}\ \frac{v'}{v}=\frac{\lambda^n\sum_{i=0}^{n}\overline{GP}_j^2}{(n+1)\prod_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}. \tag{④}$$

欲证$v'\geqslant v$，只须证上式右端之值不小于1即可．事实上，根据引理4中的③式，可得

$$\sum_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2=(n+1)(R^2-\overline{OG}^2)=(n+1)\lambda\ .$$

用上式中的$\lambda=\sum_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2/(n+1)$代入④式，得

$$\frac{\lambda^n\sum_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}{(n+1)\prod_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}=\Big(\frac{\sum_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}{n+1}\Big)^{n+1}\cdot\frac{1}{\prod_{j=0}^{n}\overline{GP}_j^2}\geqslant1\ .$$

所以$\dfrac{v'}{v}\geqslant1$，即$v'\geqslant v$．（9）式中$v'=v$的充要条件是S^{n-1}的球心O和$\mathscr{C}$的重心相合．

推论8 设v，R是n维单形$\mathscr{C}$的体积与外接球半径，则

$$\sum_{0\leq i<j\leq n}\rho_{ij}^{2}\geqslant n(1+n)^{(n-1)/n}(n!v)^{2/n}. \tag{10}$$

推论（8）是E^2中Weitzenboeck不等式$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$在$E^n$中的推广．

参 考 文 献

[1] Blumenthal, L.M., Theory and Applications of Distance Geometry, Znd ed, New York. 1970.

[2] 杨路、张景中，数学学报，23(1980)，No.5, 740—749.

[3] 杨路、张景中，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，Vol.11, No.2(1982)，1—8.

[4] Korchmaros, C., Atti Accai. Naz. Lincci Rend. cl. sci. Fis.Mat.Natur., (8)56(1974), No.6, 876—879.

[5] Dörband, W., Determinantensätze and Simplexeigenschaften. Math. Nachr., 44(1970), 295—304.

[6] Pedoe, D., Amer. Math. Monthly, 77(1970), 711—721.

[7] 陈瑞琛，扬州师范学院自然科学报，1(1984)，23—26.

[8] 刘根洪，数学的实践与认识．4(1986)．38—43.

[9] 华罗庚，高等数学引论．科学出版社(1984)．

[10] Г.Е．希洛夫著《线性空间引论》(1957)，178—179.

Sins Theorems in E^n and Their Applications

Liu Genhong

(Suzhou University)

Abstract

Sine theorems in E^n are first established. By means of the first one, a sine property is proved, which leads to some results for higher dimensional spaces in [2] and [3] (i.e. Corollaries, 2、3、4、5) and Some additional new results (i.e. Corollaries. 1、6、7、8).