·第9卷 第1期 1989年2月
数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.9 No.1 Feb., 1989

Menger空间的收敛性和隔离性*

郑 权

（华中理工大学，武汉）

一、引 言

Menger空间（简记为MS）是Menger[1]在1942年提出的．在六十年代Schweizer，Sklar[2]和Egbert[3]等对MS的基本理论曾有重要贡献．近十几年来，MS理论的研究更是方兴未艾[4]．

收敛性和隔离性是拓扑空间中的两个基本性质．MS中收敛性的重要结果是Schweizer和Sklar[2]得到的．最近龚怀云[5]对其做了改进．本文目的之一是在放宽t-模限制方面得到某种最佳结果．关于MS的隔离性，最近张敏先[6]得到以下重要结果：紧致的MS是T_4的．本文另一目的在于证明MS是T_3的．同时用本文提供的方法，我们较简洁地证明了比［6］中上述结果略广泛的一个结论．

二、收敛性

关于MS和t-模等基本概念可参见［2—4］等．下设t-模Δ满足：$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$．由［2］中P332页上的注记知MS$(X,\mathscr{F},\Delta)$是由邻域系

$$\{\{x\in X;\ F_{xy}(\varepsilon)>1-\lambda\};\ y\in X,\varepsilon,\lambda>0\}$$

诱导出的拓扑$\mathscr{T}$的Hausdorff空间．由拓扑$\mathscr{T}$按通常方法可引入开集，收敛，紧致等概念[2,7]．为比较起见，先引述［5］中的收敛性结果：

定理2.1 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是MS，t-模连续或至少象模$\max\{和-1,0\}$一样强．如果$p_n\to p$，$q_n\to q$，则

（i）$\forall t>0$，有$\liminf\limits_{n\to\infty}F_{p_nq_n}(t)\geqslant F_{pq}(t)$．

（ii）$\forall t\leqslant 0$及F_{pq}的连续点t，有$\lim\limits_{n\to\infty}F_{p_nq_n}(t)=F_{pq}(t)$．

以下给出改进的结果．

定理2.2 设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是MS，t-模满足$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$．则定理2.1的结论仍成立．

证明 （i）由［2］中定理8.1及P332上的注记即得．

---

*1985年8月25日收到，1988年1月3日收到修改稿．

(ii) 当$t\leqslant 0$时结论显然.由(i)仅须证明在F_{pq}的每一连续点t处,成立$\limsup\limits_{n\to\infty} F_{p_nq_n}(t)\leqslant F_{pq}(t)$.

事实上，取子列$\{n_k\}$，使$\lim\limits_{n_k\to\infty} F_{p_{n_k}q_{n_k}}(t)=\limsup\limits_{n\to\infty} F_{p_nq_n}(t)\overset{\text{def.}}{=\!=}r$．当$r=0$时结论显然．当$r>0$时，任取$h>0$, $\exists\varepsilon\in(0,r)$，则存在$k_1$，使$F_{p_{n_k}q_{n_k}}(t)\geqslant r-\varepsilon$ ($\forall k\geqslant k_1$)．又由$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$和$q_{n_k}\to q$，存在$k_2\geqslant k_1$，使

$$\Delta(F_{p_{n_k}q_{n_k}}(t),F_{q_{n_k}q}(h))\geqslant\Delta(r-\varepsilon,\ F_{q_{n_k}q}(h))\geqslant r-2\varepsilon\quad(\forall k\geqslant k_2)$$

同理由$p_{n_k}\to p$，存在$k_3\geqslant k_2$，使

$$F_{pq}(t+2h)\geqslant\Delta(F_{pp_{n_k}}(h),\ \Delta(F_{p_{n_k}q_{n_k}}(t),F_{q_{n_k}q}(h)))\geqslant\Delta(F_{pp_{n_k}}(h),r-2\varepsilon)\geqslant r-3\varepsilon$$

在上式先让$\varepsilon\to0^+$，再由F_{pq}在t连续，并让$h\to0^+$得$F_{pq}(t)\geqslant r=\limsup\limits_{n\to\infty} F_{p_nq_n}(t)$.定理证毕.

注2.3 显然当t-模连续或至少象模max{和$-1,0$}一样强时蕴涵$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$．反之则不然，因此定理2.2是定理2.1的改进，而且在证明上也十分简洁．另一方面，按现在引入MS中拓扑的方法[2,7]，至少需要假设t-模满足$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$．因此在这种意义下，定理2.2是最佳的．此外由定理2.2我们可以改进一些已知的结果，例如[8]中定理2及推论中t-模的条件可减弱为$\sup\limits_{x<1}\Delta(x,a)=a$，$\forall a\in[0,1]$.

三、隔离性

在本节设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是MS，CB(X){C(X)}表示X中一切非空概率有界{紧致}子集的集族(有关概念见[3,7]).

定义3.1 设A$\subset$X是概率有界的，点$p\in$X到A的概率距离定义为$F_{pA}(t)=\sup\limits_{s<t}\sup\limits_{x\in A}F_{px}(s)$.

引理3.2 设A$\subset$X是概率有界的，$F_{pA}(\varepsilon)>a$ ($\varepsilon>0,0<a<1$)，则存在$\delta=\delta(\varepsilon,a)$ ($0\leqslant\delta<\varepsilon$)及$q=q(\varepsilon,a,\delta)\in$A，使$F_{pq}(\varepsilon-\delta)>a$．特别$F_{pq}(\varepsilon)>a$.

证明 由定义3.1存在$\delta=\delta(\varepsilon,a)$ ($0\leqslant\delta<\varepsilon$)，使$\sup\limits_{x\in A}F_{px}(\varepsilon-\delta)>a$．由此又存在$q=q(\varepsilon,a,\delta)\in$A，使$F_{pq}(\varepsilon-\delta)>a$．引理证毕.

引理3.3 设A$\subset$X是概率有界的，则$N_A(\varepsilon,\lambda)=\{p\in X;\ F_{pA}(\varepsilon)>1-\lambda\}$ ($\varepsilon,\lambda>0$)是开集，且A$\subset N_A(\varepsilon,\lambda)$.

证明 仅须证明$N_A(\varepsilon,\lambda)$是开集．任取$p\in N_A(\varepsilon,\lambda)$，即$F_{pA}(\varepsilon)>1-\lambda$．由引理3.2存在$\varepsilon_1\in(0,\varepsilon)$及$q\in$A，使$F_{pq}(\varepsilon-\varepsilon_1)>1-\lambda$．因而存在$\lambda_1>0$，使$\Delta(1-\lambda,F_{pq}(\varepsilon-\varepsilon_1))>1-\lambda$.由此$\forall y\in N_p(\varepsilon_1,\lambda_1)=\{x\in X;\ F_{xp}(\varepsilon_1)>1-\lambda_1\}$得

$$F_{yA}(\varepsilon)=\sup_{s<\varepsilon}\sup_{x\in A}F_{yx}(s)\geqslant\sup_{s<\varepsilon}F_{yq}(s)=F_{yq}(s)\geqslant\Delta(F_{yp}(\varepsilon_1),F_{pq}(\varepsilon-\varepsilon_1))>1-\lambda.$$

即$y\in N_A(\varepsilon,\lambda)$．由此推出$N_p(\varepsilon_1,\lambda_1)\subset N_A(\varepsilon,\lambda)$．即$N_A(\varepsilon,\lambda)$是开集．引理证毕.

定理3.4 设A$\in$CB(X)，B$\in$C(X)，且A$\cap$B$=\phi$．则存在开集M，N，使A$\subset$M，B$\subset$N，且M$\cap$N$=\phi$.

证明 由引理3.3仅须证明存在正整数n_0，使$N_A(\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0})\cap N_B(\frac{1}{n_0},\frac{1}{n_0})=\phi$．用反证法，如若不然可取

$$x_n \in N_A(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cap N_B(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), \quad n = 1, 2, \cdots$$

即 $F_{x_n A}(\frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n}$，$F_{x_n B}(\frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n}$，$n = 1, 2, \cdots$. 由引理3.2存在$p_n \in A$，$q_n \in B$，使

$F_{x_n p_n}(\frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n}$，$F_{x_n q_n}(\frac{1}{n}) > 1 - \frac{1}{n}$. 又由B紧致不妨设$q_n \to q \in B$. 于是

$$F_{qA}(\varepsilon + \frac{2}{n}) = \sup_{t < \varepsilon + \frac{2}{n}} \sup_{x \in A} F_{qx}(t) \geqslant \sup_{t < \varepsilon + \frac{2}{n}} F_{qp_n}(t)$$

$$= F_{qp_n}(\varepsilon + \frac{2}{n}) \geqslant \Delta(F_{qq_n}(\varepsilon), \Delta(F_{q_n x_n}(\frac{1}{n}), F_{x_n p_n}(\frac{1}{n})))$$

$$\geqslant \Delta(F_{qq_n}(\varepsilon), \Delta(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})), \quad \forall \varepsilon > 0$$

现取$\varepsilon = \varepsilon_0$是$F_{qA}$的连续点，则在上式让$n \to \infty$得$F_{qA}(\varepsilon_0) = 1$. 因$F_{qA}$是分布函数[6]，故$F_{qA}$的连续点在$[0, +\infty)$中稠密. 因而$\forall \varepsilon > 0$，存在$F_{qA}$的连续点$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$，使$\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$. 从而据$F_{qA}$的不减性得$1 = F_{qA}(\varepsilon_1) \leqslant F_{qA}(\varepsilon) \leqslant F_{qA}(\varepsilon_2) = 1$. 即$F_{qA}(\varepsilon) = 1$，$\forall \varepsilon > 0$. 由定义3.1知$\sup_{y \in A} F_{qy}(t) = 1$，$\forall t > 0$. 由此存在$y_n \in A$，使$\lim_{n \to \infty} F_{qy_n}(t) = 1$，$\forall t > 0$. 即$y_n \to q$. 再由$A \in CB(X)$即得$q \in A$. 这以前述所设$q \in B$及$A \cap B = \phi$矛盾. 定理证毕.

注3.5 在引理3.3和定理3.4中我们没有假设t-模连续及$A \in C(X)$. 因而它们分别改进了文[6]中的定理5和定理6，且证明也更简洁.

由定理3.4即得以下结论：

定理3.6 (i) MS是T_3空间(T_1的正则空间).

(ii)[6] 紧致的MS是T_4空间(T_1的正规空间).

参 考 文 献

[1] K. Menger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 28(1942)535—537.

[2] B. Schweizer & A. Sklar, Pacific J. Math., 10(1960)313—334.

[3] J. Egbert, Pacific. J. Math., 24(1968)437—455.

[4] B. Schweizer & A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland. 1983.

[5] 龚怀云，西安交通大学学报，2(1985)103—106.

[6] 张敏先，PM空间的隔离性定理，成都气象学院学报，1(1986),93—104.

[7] 龚怀云，张敏先，刘作述，工程数学学报，2(1984),57—67.

[8] 郑权，数学研究与评论，1(1987),147—148.

Convergence and Separation Property in Menger Spaces

Zheng Quan

(Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

Suppose that $(X, \mathscr{F}, \Delta)$ is a Menger spece and that t-norm Δ satisfies $\sup_{x<1} \Delta(x, a) = a$ for all $a \in [0,1]$. The main result of the paper is as follows:

(i) Let $p_n \to p$, $q_n \to q$. Then $\lim_{n\to\infty} \inf F_{p_n q_n}(t) \geqslant F_{pq}(t)$ for all $t > 0$ and $\lim_{n\to\infty} F_{p_n q_n}(\bar{t}) = F_{pq}(\bar{t})$ for all $\bar{t} \leqslant 0$ and $\bar{t}$ being a continuous point of F_{pq}.

(ii) $(X, \mathscr{F}, \Delta)$ is a T_3 space.