第9卷 第1期 数学研究与评论 Vol.9 No.1
1989年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb., 1989

Hilbert－Schmidt类上的 k －拟亚正规算子*

侯晋川　王永明

（山西师范大学数学系，山西临汾）

设H是复Hilbert空间，B（H）为H上有界线性算子全体所成的Banach代数．对于$T\in$ B（H），如果T^*T的迹tr$(T^*T)<\infty$，则称T为Hilbert－Schmidt算子，其全体记为$\mathscr{C}_2$，它是B（H）中的双边理想，且按内积$\langle T,S\rangle=\mathrm{tr}(S^*T)$成为Hilbert空间，而范数$\|T\|_2=[\mathrm{tr}(T^*T)]^{1/2}=\sqrt{\langle T,T\rangle}$称为$T$的Hilbert－Schmidt范数，对任意的算子A、$B\in$ B（H），可以作$\mathscr{C}_2$上的一个有界线性算子$\tau=\tau_{AB}:\tau(X)=AXB$，$X\in\mathscr{C}_2$．一个很令人感兴趣的问题是$\tau$同$A$、$B$有何联系，如何从算子$\tau$的性质获得关于算子$A$和$B$的信息．关于这个问题已有不少作者进行了深入讨论，例如，当τ作为Hilbert空间$\mathscr{C}_2$上的正规算子、拟正规算子、次正规算子、亚正规算子以及θ－算子时，都可得到关于算子A、B的令人满意的刻划．对于某些情形，例如τ为正规、亚正规、拟正规的情形，还可把τ推广为$\Delta(X)=\sum_{i=1}^{n}A_iXB_i$的形式（参见文献〔3〕－〔7〕）．本文的目的是讨论$\mathscr{C}_2$上的k－拟亚正规算子$\tau=\tau_{AB}$．

设$T\in$ B（H），如果存在非负整数k使

$$T^{*k}(T^*T-TT^*)T^k\geqslant 0.$$

则称T为H上的k－拟亚正规算子，1－拟亚正规算子简称为拟亚正规算子．显然亚正规算子必是k－拟亚正规的．容易证明，当A、B^*是H上的k－拟亚正规算子时，$\tau=\tau_{AB}$必是$\mathscr{C}_2$上的k－拟亚正规算子（参见〔8〕）．自然会问，当τ是$\mathscr{C}_2$上k－拟亚正规算子时情形又怎样？下面我们给出这一问题的完满回答．

为了证明本文的主要结果，需要先建立一些有关k－拟亚正规算子的谱性质，它们本身也是有兴趣的．

设$T\in$ B（H）是k－拟亚正规算子，则关于空间分解$\mathrm{H}=\overline{\mathrm{R}(T^k)}\oplus\mathrm{R}(T^k)^\perp$，$T$有标准分解$T=\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ 0 & T_3\end{pmatrix}$，其中，$T_1^*T_1-T_1T_1^*\geqslant T_2T_2^*$，$T_3^k=0$．记$[T]=T^*T-TT^*$．

引理1　设T是k－拟亚正规算子．如果$\sigma(T)\neq\{0\}$，则$0\in\sigma([T])$．

证明　由条件知$T^k\neq 0$，故$T_1\neq 0$．取$\lambda\in\Pi(T_1)$（T_1的近似点谱），$\lambda\neq 0$，则存在单位向量列$\{x_n\}\subset\mathrm{R}(T^k)$使$(T_1-\lambda)x_n\to 0$，从而也有$(T-\lambda)x_n\to 0$．注意到$T_1$是亚正规的，

*1986年12月10日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

因而 $(T_1^*-\bar{\lambda})x_n\to 0$．由于$T_2T_2^*\leqslant[T_1]$，故$T_2^*x_n\to 0$，所以我们有 $(T^*-\bar{\lambda})x_n=(T_1^*-\bar{\lambda})x_n\oplus T_2^*x_n\to 0$，从而 $[T]x_n\to 0$，即 $0\in\Pi([T])\subset\sigma([T])$．证毕．

注 若在引理 1 中去掉 $\sigma(T)\neq\{0\}$ 的假设，引理的结论不真．例如，作H⊕H⊕H上的 2－拟亚正规算子 $T=\begin{pmatrix}0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & A_2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，其中$A_1, A_2\in$ B（H）任取，由于

$$T^*T-TT^*=\begin{pmatrix}-A_1A_1^* & 0 & 0\\ 0 & A_1^*A_1-A_2A_2^* & 0\\ 0 & 0 & A_2^*A_2\end{pmatrix}$$

如果取A_1、A_2为可逆正算子使得 $\sigma(A_1)\subset[1,2]$，$\sigma(A_2)\subset[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$，那末对任$x\in$ H，有

$\|(A_1^2-A_2^2)x\|\geqslant\frac{7}{16}\|x\|$，即$A_1^2-A_2^2$可逆，而这蕴涵 $[T]$ 也可逆，故 $0\bar{\in}\sigma([T])$．

引理 2 设T是k－拟亚正规算子，则 $0\in\sigma(\{T\})$，其中 $\{T\}=T^{*k}(T^*T-TT^*)T^k$．

证明 若$T^k=0$，结论显然成立．若$T^k\neq 0$，由引理 1 及其证明，存在$\lambda\in\Pi(T)$ 和单位向量列 $\{x_n\}\subset$ R (T^k) 使得 $(T-\lambda)x_n\to 0$，$[T]x_n\to 0$．由于 $[T]T^kx_n=[T](T^{k-1}+\lambda T^{k-2}+\cdots+\lambda^{k-1})(T-\lambda)x_n+\lambda^k[T]x_n\to 0\ (n\to\infty)$．所以 $\{T\}x_n=T^{*k}[T]T^kx_n\to 0\ (n\to\infty)$，即 $0\in\sigma(\{T\})$．证毕．

下面的引理是关键的．

引理 3 设T为H上k－拟亚正规算子，$T^k\neq 0$．记r为T的谱半径，$\{T\}=\int_0^\infty\lambda dE_\lambda$为 $\{T\}$ 的谱分解．对任意正数ε，令$\mathrm{H}_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda\mathrm{H}$，则H有分解$\mathrm{H}=\mathrm{H}_\varepsilon\oplus\mathrm{H}_2$，对任意非负整数$m$，$n$，记算子$T^{*m}T^n$的相应矩阵分解为

$$T^{*m}T^n=\begin{pmatrix}S_{mn} & X\\ Y & Z\end{pmatrix},$$

那末必有$\|S_{mn}\|\geqslant r^{m+n}$成立．

推论 4 设T为H上亚正规算子，则对任意非负整数$k(=0,1,2,\cdots)$，引理 3 的结论都成立．

引理 3 的证明 记P_ε为H到H_ε上的正交投影算子．对任意$\lambda\in\Pi(T)$，$\lambda\neq 0$，由引理2, 3 及其证明知，存在单位向量列 $\{x_l\}\subset$ R (T^k)，使得 $(T-\lambda)x_l\to 0$，$(T^*-\bar{\lambda})x_l\to 0$ 及 $\{T\}x_l\to 0\ (l\to\infty)$．由此推得 $(I-P_\varepsilon)x_l\to 0\ (l\to\infty)$，于是$\|P_\varepsilon x_l\|$下方有界，即存在$\delta>0$ 使$\|P_\varepsilon x_l\|\geqslant\delta$对所有$l$都成立，现在

$$\begin{aligned}(S_{mn}-\bar{\lambda}^m\lambda^n)P_\varepsilon x_l&=P_\varepsilon(T^{*m}T^n-\bar{\lambda}^m\lambda^n)P_\varepsilon x_l\\&=P_\varepsilon[T^{*m}(T^n-\lambda^n)+\lambda^n(T^{*m}-\bar{\lambda}^m)]P_\varepsilon x_l\to 0\quad(l\to\infty),\end{aligned}$$

所以，$\bar{\lambda}^m\lambda^n\in\Pi(S_{mn})\subset\sigma(S_{mn})$．由此立得

$$\|S_{mn}\|\geqslant\sup\{|\lambda|^{m+n};\ \lambda\in\Pi(T)\}=r^{m+n}.$$

现在叙述本文的主要结果．

定理 5 设A、$B\in$ B（H），如果$A^k\neq 0$，$B^k\neq 0$，则$\tau=\tau_{AB}$为Hilbert-Schmidt 类$\mathscr{C}_2$上的k－拟亚正规算子的充分必要条件是A、B^*为H上k－拟亚正规算子．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 对任意$X\in\mathscr{C}_2$，有

$$\tau^{*k}(\tau^*\tau-\tau\tau^*)\tau^k(X)=\{A\}XB^{k+1}B^{*k+1}+(A^{*k}A)(A^{*k}A)^*X\{B^*\}.$$

因而易知τ为$\mathscr{C}_2$上k－拟亚正规算子的充分必要条件是对任意$X\in\mathscr{C}_2$下面不等式都成立

$$\langle\{A\}XB^{k+1},\ XB^{k+1}\rangle\geqslant\langle-\{B^*\}X^*A^{*k}A,X^*A^{*k}A\rangle, \qquad (1)$$

其中〈·，·〉表示$\mathscr{C}_2$的内积，由〔8〕我们只须证明τ的k－拟亚正规性蕴涵A、B^*的k－拟亚正规性。

由假设条件$A^k\neq0$，$B^k\neq0$可知$\tau^k\neq0$，$B^{k+1}\neq0$且$A^{*k}A\neq0$．现设（1）成立，我们必需证明$\{A\}\geqslant0$和$\{B^*\}\geqslant0$．分以下三步证之。

1° A、B^*中至少有一个是k－拟亚正规的。

用反证法。假设结论不对，记$\{A\}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$，$\{B^*\}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}F_\lambda$分别为自伴算子$\{A\}$和$\{B^*\}$的谱分解。令$\mathrm{H}_+^{(1)}=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}E_\lambda\mathrm{H}$，$\mathrm{H}_-^{(1)}=\int_{-\infty}^{0-0}\mathrm{d}E_\lambda\mathrm{H}$，$\mathrm{H}_+^{(2)}=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}F_\lambda\mathrm{H}$，$\mathrm{H}_-^{(2)}=\int_{-\infty}^{0-0}\mathrm{d}F_\lambda\mathrm{H}$，于是必有$\mathrm{H}_-^{(i)}\neq\{0\}$，$i=1,2$．任取一秩算子$X_{22}\in\mathrm{B}(\mathrm{H}_-^{(2)}\to\mathrm{H}_-^{(1)})$，作$\mathrm{H}=\mathrm{H}_+^{(2)}\oplus\mathrm{H}_-^{(2)}$到$\mathrm{H}=\mathrm{H}_+^{(1)}\oplus\mathrm{H}_-^{(1)}$的算子$X_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&X_{22}\end{pmatrix}$，则$X_1\in\mathscr{C}_2$。因为$\mathrm{R}(X_1)\subset\mathrm{H}_-^{(1)}$，$\mathrm{R}(X_1^*)\subset\mathrm{H}_-^{(2)}$，由迹的定义易知

$$\langle\{A\}X_1B^{k+1},\ XB^{k+1}\rangle\leqslant0,$$

而

$$\langle-\{B^*\}X_1^*A^{*k}A,\ X_1^*A^{*k}A\rangle\geqslant0.$$

根据不等式（1），必有$X_1B^{k+1}=0$和$X_1^*A^{*k}A=0$成立。于是B^{k+1}、$A^{*k}A$分别有相应的矩阵分解

$$B^{k+1}=\begin{array}{c}\mathrm{H}_+^{(2)}\\\mathrm{H}_-^{(2)}\end{array}\begin{pmatrix}T_1&T_2\\0&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}\mathrm{H}_+^{(2)}\\\mathrm{H}_-^{(2)}\end{array},\quad A^{*k}A=\begin{array}{c}\mathrm{H}_+^{(1)}\\\mathrm{H}_-^{(1)}\end{array}\begin{pmatrix}S_1&S_2\\0&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}\mathrm{H}_+^{(1)}\\\mathrm{H}_-^{(1)}\end{array}.$$

又因为B^{k+1}、$A^{*k}A$都不为0，存在一秩算子$X_{12}\in\mathrm{B}(\mathrm{H}_-^{(2)}\to\mathrm{H}_+^{(1)})$，使$X_2=\begin{pmatrix}0&X_{12}\\0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{C}_2$满足

$$X_2^*A^{*k}A=\begin{pmatrix}0&0\\X_{12}^*S_1&X_{12}^*S_2\end{pmatrix}\neq0.$$

再注意到$X_2B^{k+1}=0$，于是由（1）得

$$0\geqslant\langle-\{B^*\}X_2^*A^{*k}A,\ X_2^*A^{*k}A\rangle>0,$$

矛盾。所以$\{A\}\geqslant0$和$\{B^*\}\geqslant0$至少有一个成立。

2° 设$\{B^*\}\geqslant0$，则也必有$\{A\}\geqslant0$．

仍用反证，如果$\{A\}$不是非负算子，则存在$\lambda_0<0$使得$\lambda_0\in\sigma(\{A\})$。任取$\delta>0$使$\lambda_0+\delta<0$，作空间分解$\mathrm{H}=\mathrm{H}_1^{(1)}\oplus\mathrm{H}_2^{(1)}$，其中$\mathrm{H}_1^{(1)}=\int_{-\infty}^{\lambda_0+\delta}\mathrm{d}E_\lambda\mathrm{H}$，$\mathrm{H}_2^{(1)}=\mathrm{H}_1^{(1)\perp}=\int_{\lambda_0+\delta-0}^{+\infty}\mathrm{d}E_\lambda\mathrm{H}$。显然$\mathrm{H}_1^{(1)}\neq\{0\}$。对任意的$\varepsilon>0$，令$\mathrm{H}_\varepsilon^{(2)}=\int_0^\varepsilon\mathrm{d}F_\lambda\mathrm{H}$，$\mathrm{H}_2^{(2)}=\mathrm{H}_\varepsilon^{(2)\perp}$。关于空间分解$\mathrm{H}=\mathrm{H}_\varepsilon^{(2)}\oplus\mathrm{H}_2^{(2)}$、$B^{k+1}$可表为$B^{k+1}=\begin{pmatrix}S_{11},&S_{12}\\S_{21},&S_{22}\end{pmatrix}$。记$r$为$B$的谱半径，由于$B^*$是$k$－拟亚正规的，根据引理3有$\|S_{11}\|\geqslant r^{k+1}$。现在，取单位向量$x_0\in\mathrm{H}_\varepsilon^{(2)}$使之满足

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\|S_{11}x_0\| \geqslant \frac{1}{2}r^{k+1}$，，再取单位向量$y_0 \in H_1^{(1)}$，作一秩算子$X_{11} = y_0 \otimes S_{11}x_0 \in B(H_2^{(2)} \to H_1^{(1)})$，令$X_1 = \begin{array}{c} H_1^{(1)} \\ H_2^{(1)} \end{array} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} H_1^{(2)} \\ H_2^{(2)} \end{array} \in \mathscr{C}_2$，则有

$$\langle\{A\}X_1B^{k+1}, X_1B^{k+1}\rangle \leqslant (\lambda_0+\delta)\|X_1B^{k+1}\|_2^2$$
$$\leqslant (\lambda_0+\delta)\|X_{11}S_{11}\|_2^2 \leqslant (\lambda_0+\delta)\|X_{11}S_{11}x_0\|^2$$
$$= (\lambda_0+\delta)\|S_{11}x_0\|^4 \leqslant \frac{1}{16}r^{4(k+1)}(\lambda_0+\delta).$$

另一方面

$$\langle -\{B^*\}X_1^*A^{*k}A, X_1^*A^{*k}A\rangle \geqslant -\varepsilon\|X_1^*A^{*k}A\|_2^2$$
$$\geqslant -\varepsilon\|A\|^{2(k+1)}\|X_1^*\|_2^2 \geqslant -\varepsilon\|A\|^{2(k+1)}\|S_{11}x_0\|^2$$
$$\geqslant -\varepsilon\|A\|^{2(k+1)}\|B^{k+1}\|^2,$$

从而由（1）得

$$\frac{1}{16}(\lambda_0+\delta)r^{4(k+1)} \geqslant -\varepsilon\|A\|^{2(k+1)}\|B\|^{2(k+1)},$$

令$\varepsilon \to 0$，便得$\lambda_0+\delta \geqslant 0$，矛盾．所以必有$\{A\} \geqslant 0$．

3° 利用引理3类似可证$\{A\} \geqslant 0$蕴涵$\{B^*\} \geqslant 0$成立．

综合1°—3°，定理证毕．

由定理5立得下面的

推论6 τ_{AB}为Hilbert-Schmidt类$\mathscr{C}_2$上k－拟亚正规算子的充要条件是下列之一被满足：

（i）A、B^*为k－拟亚正规算子；

（ii）$A^k = 0$而B任意；

（iii）$B^k = 0$而A任意．

下面我们再给出用H中内积表达的一对算子A、B^*为k－拟亚正规的特征．

定理7 设A、$B \in B(H)$，$A^k \neq 0$，$B^k \neq 0$，则A、B^*同为k－拟亚正规算子的充要条件是对任意的一秩算子X和任意向量$x \in H$，不等式

$$(\{A\}XB^{k+1}x, XB^{k+1}x) \geqslant (-\{B^*\}X^*A^{*k}Ax, X^*A^{*k}Ax) \qquad (2)$$

成立．

注 不等式（2）中取B^{k+1}和$A^{*k}A$并不是本质的，例如可以任取为B^mB^{*n}及$A^{*l}A^r$的形式．这里之所以如此取法，是为了与定理1中不等式（1）的形式相统一．

证明 必要性显然，只证充分性．如果（2）成立，由于$A^k \neq 0$，$B^k \neq 0$，故必有$B^{k+1} \neq 0$，否则由$0 \geqslant (-\{B^*\}X^*A^{*k}Ax, X^*A^{*k}Ax)$对所有一秩算子$X$及向量$x$成立得$\{B^*\} \geqslant 0$，即$B^*$是$k$－拟亚正规的，但此时$B^k \neq 0$蕴涵$B^{k+1} \neq 0$，矛盾．类似于定理5的证明可知$A$、$B^*$中至少有一个是$k$－拟亚正规的，例如，不妨设$A$是$k$－拟亚正规算子，下面证明$B^*$也是$k$拟亚正规的．用反证法，假设不然，记$\{B^*\} = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF_\lambda$为$\{B^*\}$的谱分解，则$H_-^{(2)} = \int_{-\infty}^{0-0} dF_\lambda H \neq \{0\}$．如果$\dim H_-^{(2)} \geqslant 2$，则对每个$x \in H$，存在非零向量$u_x \in H_-^{(2)}$使得$(B^{k+1}x, u_x) = 0$．任取$x$使$A^{*k}Ax \neq 0$而令$X = A^{*k}Ax \otimes u_x$，则

$$0 = (\{A\}XB^{k+1}x, XB^{k+1}x) \geqslant (-\{B^*\}X^*A^{*k}Ax, X^*A^{*k}Ax) > 0.$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

这不可能.因此必有$\dim H_-^{(2)}=1$，而且若有$x\in H$使$(B^{k+1}x,u)=0$，其中$u\in H_-^{(2)}$，$u\neq 0$，则必有$x\in\ker(A^{*k}A)$。按空间分解$H=H_-^{(2)}\oplus H_+^{(2)}$，$B^{k+1}$可表示为$B^{k+1}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & u_0\otimes f_0\\ g_0\otimes u_0 & S_{22}\end{pmatrix}$，其中$u_0$是$H_-^{(2)}$的单位向量，$f_0,g_0\in H_+^{(2)}$，$\lambda_0$为一复数．令$M=\{f_0,u_0\}^\perp\subset H_+^{(2)}$，则对所有$x\in M$，必有$(B^{k+1}x,u_0)=0$，从而由上述证明可知，$M\subset\ker(A^{*k}A)$，于是$A^*A^k$的值域$R(A^*A^k)$包含在$f_0$同$u_0$张成的线性子空间中，即$A^*A^k$最多为二秩算子．由此推得$A^k$也最多为二秩的，即$A$是多项式紧的$k$－拟亚正规算子．根据文献〔1〕知，$A$是正规算子与一$k$阶幂零算子的直交和，从而$\{A\}=0$．于是由（2），对任意一秩算子$X$及任意向量$x$都有

$$0\geqslant(-\{B^*\}X^*A^{*k}Ax,X^*A^{*k}Ax)$$

成立，而显然此蕴涵$\{B^*\}\geqslant 0$，与反证假设相矛盾．所以A和B^*都是k－拟亚正规算子．证毕．

参 考 文 献

〔1〕Campbell, S.L.& Gupta B.C., Rev.Roum.Math.Pures Appl., Vol. 24(1979), 27—31.

〔2〕侯晋川，数学杂志，Vol.5,No.1(1985)，23—32.

〔3〕杜鸿科、侯晋川，数学年刊，Vol.6A(2)(1985),215—224.

〔4〕Bojan Magajna, Bull. Austral. Math.Soc., Vol.31(1985), 235—243.

〔5〕严绍宗、李绍宽，科学通报，Vol.30, No.11(1985),810—813.

〔6〕严绍宗、朱建中，中国科学（A辑），11(1987)，1139—1146.

〔7〕李刚，拟正规的初等算子，待发表.

〔8〕侯晋川，数学学报，Vol. 28, No.3(1985)，333—340.

k-Quasihyponormal Operators on the Hilbert-Schmidt Class

Hou jinchuan　Wang Yongming

(Shanxi Teachers University)

Abstract

An operator T acting on a Hilbert space H is called k-quasihyponormal if $\{T\}=T^{*k}(T^*T-TT^*)T^k\geqslant 0$. Let A and B be two operators on H, one can obtain an operator $\tau=\tau_{AB}$ on the class $\mathscr{C}_2$ of all Hilbert-Schmidt operators on H in such a way that $\tau(X)=AXB$ for every $X\in\mathscr{C}_2$. In this note the authors show that

Lemma Assume that T is a k-quasihyponormal operator on H and $T^k\neq 0$. Let $\{T\}=\int_0^\infty\lambda dE_\lambda$ be the spectral decomposition of $\{T\}$. Given $\varepsilon>0$, denote $H_\varepsilon=\int_0^\varepsilon dE_\lambda H$. For any non-negative integers m and n, write $T^{*m}T^n=\begin{pmatrix}S_{mn} & X\\ Y & Z\end{pmatrix}$ with $H=H_\varepsilon\oplus H_\varepsilon^\perp$. Then we must have $\|S_{mn}\|\geqslant r^{m+n}$, where r is the spectral

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

radius of T.

Theorem τ is a k-quasihyponormal operator on the Hilbert-Schmidt class $\mathscr{C}_2$ if and only if one of the following conditions holds:

(1) Both A and B^* are k-quasihyponormal;

(2) $A^k = 0$ or $B^k = 0$.

Theorem Suppose that $A^k \neq 0$ and $B^k \neq 0$. Then both A and B^* are k-quasihyponormal operators if and only if the inequality

$$(\{A\} X B^{k+1} x, \ X B^{k+1} x) \geqslant (-\{B^*\} X^* A^{*k} A x, \ X^* A^{*k} A x)$$

holds for every rank-one operator X and every vector x in H.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.