第9卷 第1期　　数学研究与评论　　Vol.9 No.1
1989年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb., 1989

一阶非线性椭圆型复方程的间断Riemam边值问题*

杨广武　许克明

（河北轻化工学院数学教研室，石家庄）

§1 问题的提法

本文讨论一阶非线性一致椭圆型复方程

(1.1)
$$\begin{aligned} &w_z = F(z,w,w_z),\quad F = Qw_z + A_1 w + A_2\overline{w} + A_3,\\ &Q = Q(z,w,w_z),\ A_j = A_j(z,w),\quad j = 1,2,3 \end{aligned}$$

的间断非线性Riemann边值问题。以E表示复平面，D^+表示有界$N+1$连通区域，其边界由$N+1$条光滑闭曲线组成，$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{N}\Gamma_j \in C_\mu^1(0<\mu<1)$，$\Gamma_j(j=1,\cdots,N)$均包含在$\Gamma_0$内，$D_j^-$是由$\Gamma_j(j=1,\cdots,N)$所围成的有界区域，$D_0^-$是$\Gamma_0$的外部无界区域，$D^- = \bigcup_{j=0}^{N} D_j^-$，取$R$足够大，使$\overline{D^+} \subset D_R = \{|z| \le R\}$，记$D_R^- = D^- \cap D_R$，$D_R^+ = D^+ \cap D_R$. 设复方程（1.1）在$D_R$上满足由下述〈1〉、〈2〉所组成的条件C：

〈1〉$Q(z,w,U)$，$A_j(z,w)(j=1,2,3)$对$z\in D_R$、$w\in E$及$U\in E$有定义，又一致地对$z\in D_R^\pm$、$U\in E$关于w连续，并对$D_R^\pm$上的连续函数$w(z)$与可测函数$U(z)\in L_{p_0}(D_R^\pm)$在D_R上可测，且当$z\overline{\in}D_R$时$Q(z,w,U)=0$，$A_j(z,w)=0(j=1,2,3)$. 又函数$A_j(z,w)$满足：

(1.2)
$$\sum_{j=1}^{3}\|A_j(z,w(z))\|_{L_p(D_R)} \le k$$

上述$k(>0)$，p，$p_0(2<p_0<p<\infty)$均为常数.

〈2〉复方程（1.1）满足一致椭圆型条件：

(1.3)
$$|F(z,w,U_1)-F(z,w,U_2)| \le q_0|U_1-U_2|,\quad (0\le q_0<1)$$

所谓复方程（1.1）的间断非线性Riemann边值问题，即求（1.1）在$D^\pm$上的分片正则解

$$w(z) = \begin{cases} w^+(z), & z\in D^+\\ w^-(z), & z\in D^- \end{cases}$$ 使其适合如下条件：

(1.4)
$$w^+(z) = G(z)w^-(z) + g(z,w^+,w^-),\quad z\in\Gamma,$$

(1.5)
$$w^-(a_j) = b_j,\quad |b_j| \le l_0,\quad j=1,2,\cdots,\kappa,\quad w^-(\infty) = 0,\quad 当\kappa\ge 0,$$

*1987年1月3日收到. 本文所用符号与[1]相同.

其中a_j为D_0内的k个有穷点，b_j为复常数，而κ为问题的指标．又$G(z)\neq 0$，$g(z,w^+,w^-)=g_0(z)g_1(z,w^+,w^-)$，$G(z)$ 与$g_0(z)$ 在Γ上除去有限个第一类间断点$t_1,\cdots,t_n$外均连续，以$\Gamma_j^*(j=1,2,\cdots,m)$ 表示将Γ去掉这些间断点后的曲线弧，记$\Gamma^*=\bigcup_{j=1}^m\Gamma_j^*$，那么$C_\nu[G(z),\Gamma^*]\leq l_0$，$C_\nu[g_0(z),\Gamma^*]\leq l_0$．函数$g_1(z,w^+,w^-)$ 满足

$$C_\nu[g_1(z,0,0),\Gamma]\leq l_0\quad(l_0\text{为常数})\tag{1.6}$$

$$C_\alpha[g_1(z,w_1^+,w_1^-)-g_1(z,w_2^+,w_2^-),\Gamma]\leq\varepsilon\{C_\alpha[w_1^+-w_2^+,\Gamma]+C_\alpha[w_1^--w_2^-,\Gamma]\},$$

其中$\frac{1}{2}<\nu<1$，$\alpha=\frac{p_0-2}{p_0}$，$0\leq\varepsilon<\infty$.

我们记 $\theta_j=\arg\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)}$，$1\leq j\leq n$，如果取

$$\kappa_j=\left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right]\text{或}\kappa_j=\left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right]+1,\quad 1\leq j\leq n,\tag{1.7}$$

则相应地有

$$0\leq\frac{\theta_j}{2\pi}-\kappa_j<1\text{ 或 }-1\leq\frac{\theta_j}{2\pi}-\kappa_j<0,\quad 1\leq j\leq n$$

当$\kappa_j(j=1,\cdots,n)$中有p个使（1.7）中后一式成立，而其余的κ_j使（1.7）的前一式成立，则问题的标数为

$$\kappa=\sum_{j=1}^n\kappa_j=\sum_{j=1}^n\left[\frac{\theta_j}{2\pi}\right]+p,$$

上述$G(t_j-0)$ 与$G(t_j+0)$ 分别表示在间断点t_j处的$G(t)$ 的左右极限．当$\kappa<0$ 时，$w^-(\infty)=0$ 要用条件

$$w^-(z)=O(|z|^{\kappa}),\ z\to\infty\tag{1.8}$$

来代替，即允许$w^-(z)$ 在无穷远点有不超过$-\kappa-1$ 阶极点．我们把方程（1.1）的上述边值问题称为问题R，而把相应解析函数的问题R记为问题R_0．

对具有间断线性边界条件的问题R_0已有不少研究[2,3,4]．候宗义讨论了方程为$w_{\bar z}+A\overline{w}=0$ 的Riemann—Haseman型边值问题的奇异情形[5]．近年，H.Begehr和G. N. Hile研究了非线性Riemann问题，但他们只讨论了方程（1.1）中$Q(z,w,w_z)=0$ 的拟线性情形，并且加于$g(z,w^+,w^-)$ 的条件较强[6]．

本文，先讨论问题R_0的可解性，然后利用复方程（1.1）的解的第一类表示式给出问题R解的先验估计，进而使用连续性方法与Schauder不动点定理证明了复方程（1.1）问题R的可解性．

§2 两个引理

先给出解析函数问题R_0的解的先验估计，然后再证明某些条件下问题R_0的可解性．

引理2.1 若$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^+(z), & z\in D^+\\ \Phi^-(z), & z\in D^-\end{cases}$ 是问题R_0的解，则当（1.6）中的常数ε适当小，$\Phi(z)$ 满足估计式

$$C_\alpha[\Phi^\pm(z),\ D_{Rn}^\pm]+L_{p_0}[\Phi^{\pm\prime}(z),\ D_{Rn}^\pm]\leq M_1\tag{2.1}$$

$$C_\delta[\Pi^\pm(z)\Phi^\pm(z),\ \overline{D}_R^\pm]\leq M_2\tag{2.2}$$

其中$\Pi(z)=\prod_{j=1}^{n}|z-t_j|^{\sigma_j+\tau}$，$\sigma_j=|r_j|$，$r_j=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t_j-0)}{G(t_j+0)}$， $0<\delta<\min(\nu,\tau)$，τ为任一给定的小正数，而$M_1=M_1(\nu,l_0,D^{\pm}_{Rn})$，$M_2=M_2(\nu,l_0,\Pi,D^{\pm},\delta)$，$D^{\pm}_{Rn}$是$\overline{D}^{\pm}_{R}$上距离$t_j$（$j=1,2,\cdots,n$）不小于$\frac{1}{n}$（$n>1$）的点集，$2<p_0<\min(p,\frac{1}{1-\nu})$.

证明 引入分片解析函数

$$
(2.3)\qquad \Omega(z)=\begin{cases}\Omega^{+}(z)=\prod_{j=1}^{m_0}(z-t_j)^{r_j}\prod_{j=m_0+1}^{m_1}\left(\frac{z-t_j}{z-z_1}\right)^{r_j}\cdots\prod_{j=m_{N-1}+1}\left(\frac{z-t_j}{z-z_N}\right)^{r_j},\\ \Omega^{-}(z)=\prod_{j=1}^{m_0}\left(\frac{z-t_j}{z-z_0}\right)^{r_j}\prod_{j=m_1+1}^{m_1}(z-t_j)^{r_j}\cdots\prod_{j=m_{N-1}+1}^{n}(z-t_j)^{r_j},\end{cases}
$$

$z_0\in D^{+}$，$z_j\in D^{-}$，$1\leq j\leq n$.

在上式中，我们设间断点$t_j\in\Gamma_0$，$j=1,\cdots,m_0$，$t_j\in\Gamma_{k+1}$，$j=m_k+1,\cdots,m_{k+1}$，$k=0,1,\cdots,N-1$，而$m_N=n$. 作函数的变换

$$(2.4)\qquad \Phi_1(z)=\Phi(z)/\Omega(z)$$

这可将$\Phi(z)$所满足的间断联结边界条件（1.4）转化为$\Phi_1(z)$所满足的具有连续系数$G_1(z)$的边界条件

$$(2.5)\qquad \Phi_1^{+}(z)=G_1(z)\Phi_1^{-}(z)+g_2(z,\Phi_1^{+},\Phi_1^{-}),\quad z\in\Gamma,$$

其中$g_2(z,\Phi_1^{+},\Phi_1^{-})=g(z,\Phi^{+},\Phi^{-})/\Omega^{+}(z)$. 根据［7］求得形式解：

$$(2.6)\qquad \Phi^{\pm}(z)=\Omega^{\pm}(z)X_1^{\pm}(z)[\ ^{\pm}(z)+p_{\kappa-1}(z)],\quad (z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g_2(t,\Phi_1^{+},\Phi_1^{-})}{X_1^{+}(t)(t-z)}dt,$$

其中$X^{\pm}(z)$为适合（2.5）齐次边界条件的标准解，而$p_{\kappa-1}(z)$为$\kappa-1$次多项式，其系数由（1.5）确定，当$\kappa<0$时，取$p_{\kappa-1}(z)\equiv 0$. 使用［3］§22命题Ⅰ—Ⅳ，并仿［11］定理一的估计法，当（1.6）中的ε适当小时，可导出$\Phi^{\pm}(z)$所满足的估计式

$$(2.7)\qquad C_a[\Phi_1^{\pm}(z),D^{\pm}_{Rn}]+L_{p_0}[\Phi_1^{\pm\prime}(z),D^{\pm}_{Rn}]\leq M_3\quad \|W_n\|_{p_0(D_R)}$$

$$(2.8)\qquad C_\delta[\Pi(z)\Omega^{\pm}(z),\Phi(z),\overline{D}^{\pm}_{R}]\leq M_4$$

其中$M_3=M_3(\nu,l_0,D^{\pm}_{Rn})$，$M_4=M_4(\nu,l_0,\Pi,D^{\pm},\delta)$，由此二式易知（2.1）（2.2）成立。

引理2.2 若（1.6）式中的常数ε适当小，则解析函数问题R_0存在唯一解.

证明 用连续性方法. 考虑带有参数k（$0\leq k\leq 1$）的边界条件

$$(2.9)\qquad \Phi^{+}(z)=G(z)\Phi^{-}(z)+kg(z,\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z))+r(z),\quad z\in\Gamma$$

其中$r(z)$满足条件：对任意的正数τ，$\Pi(z)r(z)\in C_\delta(\Gamma)$，$0<\delta<\tau$. 我们把求解析函数适合条件（2.9）与（1.5）（1.8）的边值问题简称为问题R_1.

设E是$0\leq k\leq 1$中使解析函数问题R_1对任意具有上述性质的$r(z)$均可解的点集，易知当$k=0$时，问题R_1有解[7]，其解$\Phi(z)$形如（2.6），再利用估计式（2.1）与（2.2），仿文［9］可证E是$0\leq k\leq 1$中的开集与闭集，从而E=［0，1］，这表明当$k=1$，$r(z)=0$时解析函数问题R_0是可解的.

§3 复方程（1.1）问题R的解的表示式与估计式

定理3.1 若$W^{\pm}(z)$是方程（1.1）问题R的解，则$W^{\pm}(z)$在任一有界区域D_R内（除去间断点$t_1,\cdots,t_n$）可以表示为

(3.1) $$W^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}[x(z)]e^{\varphi(z)}+\psi(z)$$

其中$\psi(z)=Tf-T_1f$, $\varphi(z)=Tg-T_1g$, $T\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_R}\frac{\omega(\xi)}{\xi-z}\ \sigma_{\xi}$, $T_1\omega=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_R}\frac{\omega(\xi)}{\xi-1}\ \sigma_{\xi}$, $x(z)=z+Th-T_0h$为全平面E上的一个完全同胚, $T_0h=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_R}\frac{h(\xi)}{\xi}d\sigma_{\xi}$, 而$\Phi^{\pm}(x)$ 是区域$G^{\pm}=x(D^{\pm})$ 上（除去$t_1,\cdots,t_n$）的解析函数问题R_0的解，满足条件：

(3.2) $$\Phi^{+}(x)=G^{*}(x)\Phi^{-}(x)+g^{*}(x,\Phi^{+}(x),\Phi^{-}(x)),x\in L=x(\Gamma),$$

(3.3) $$\begin{cases}\Phi^{-}(x)=G^{*}(-\psi[z^{-1}(x_j)]\}e^{-\varphi[z^{-1}(x_j)]},\quad j=1,\cdots,\kappa,\Phi^{-}(\infty)=0,\\ x_j=x_j(a_j),\ \text{当}\kappa\geq 0,\\ \Phi^{-}(x)=o(|x|^{-\kappa}),x\to\infty,\ \text{当}\chi<0,\end{cases}$$

其中$G^{*}(x)=G(z^{-1}(x))e^{\varphi[z^{-1}(x)]-\varphi[z^{+}(x)]}$, $g^{*}(x,\Phi^{+}(x),\Phi^{-}(x))=\{g(z^{-1}(x),\Phi^{+}(z^{+}(x)),\Phi^{-}(x)))+G(z^{-}(x))\psi(z^{-}(x))-\psi(z^{+}(x))\}e^{-\varphi[z^{+}(x)]}$, 而$z=z^{\pm}(x)$为$x=x^{\pm}(z)$ 的反函数，又函数$f(z)$、$g(z)$、$h(z)$、$\varphi(z)$、$\psi(z)$、$x(z)$及$z(x)$ 满足估计式：

(3.4) $$\|f\|_{L_{p_0}(D_R)}\leq M_5,\ \|g\|_{L_{p_0}(D_R)}\leq M_5,\ \|h\|_{L_{p_0}(D_R)}\leq M_5,$$

(3.5) $$C_a[\psi(z),\ D_R]\leq M_6,\ C_a[\varphi(z),D_R]\leq M_6,$$
$$\||\psi_{\bar z}|+|\psi_z|\|_{L_{p_0}(D_R)}\leq M_7,$$

(3.6) $$C_a[x(z)-z,E]\leq M_8,C_a[z(x)-x,E]\leq M_8,$$
$$\||x_{\bar z}|+|x_z|\|_{L_{p_0}(D_R)}\leq M_9,\quad \||z_{\bar x}|+|z_x|\|_{L_{p_0}(G_R)}\leq M_9,$$

其中$a=\frac{p_0-2}{p_0}$, $M_j=M_j(q_0,p_0,D^{\pm},l_0,\nu,k)$, $j=5,6,7,8,9$.

证明 考虑奇异积分方程组

(3.7) $$f-Q\Pi f=A_1(Tf-T_1f)+A_2(\overline{Tf}-\overline{T_1f})+A_3,$$

(3.8) $$g-Q\Pi g=A_1+A_2\frac{\overline{w}^{\pm}}{w^{\pm}},\ \text{当}w^{\pm}(z)=0\text{时，令}A_2\frac{\overline{w}^{\pm}}{w^{\pm}}=0,$$

(3.9) $$h-Q\Pi h=Q,\ \text{当}W_z^{\pm}=0\text{时，令}Q=0$$

其中$A_j=A_j(z,W^{\pm})$, $j=1,2,3$, $Q=\dfrac{F(z,W^{\pm},W_z^{\pm})-F(z,W^{\pm},0)}{W_z^{\pm}}$

由（1.3）式取$U_1=W_z^{\pm}$, $U_2=0$, 则有$|Q|\leq q_0<1$, 再由Fredholm定理可知，方程（3.7）有唯一解$f(z)\in L_{p_0}(D_R)$; 设$w^{\pm}=W^{\pm}-\psi(z)$ 并由压缩映射原理可知，方程（3.8）、（3.9）分别有唯一解$g(z)$, $h(z)\in L_{p_0}(D_R)$, 至于估计式（3.4）、（3.5）、（3.6）的导出可仿［8］定理2.1的证明. 可以验证$w^{\pm}[z(x)]e^{-\varphi[z(x)]}=\Phi(x)$ 是$x(D^{\pm})$内的（除去点$t_j=x(t_j)$, $j=1,2,\cdots,n$）分片解析函数，满足条件（3.2）与（3.3），即$\Phi^{\pm}(x)$ 是解析函数问题R_0的解. 将（3.8）乘以$w^{\pm}(z)$, （3.9）乘以$\Phi^{\pm\prime}(x)e^{\varphi(z)}$ 并与（3.7）相加，且注意到

(3.10) $$W_{\bar z}^{\pm}=\Phi^{\pm\prime}(x)he^{\varphi(z)}+w^{\pm}g+f,\ W_z^{\pm}=\Phi^{\pm\prime}(x)(1+\Pi h)e^{\varphi(z)}+w^{\pm}\Pi g+\Pi f,$$

可知（3.1）所示的$W^{\pm}(z)$ 几乎处处满足方程（1.1），因而方程（1.1）问题R的解可以表示成（3.1）的形式.

据此定理，再结合（2.1）及（3.5）、（3.6）式可得下述定理：

定理3.2 设$W^{\pm}(z)$ 是方程（1.1）问题R的解，则$W^{\pm}(z)$ 满足估计式

(3.11) $$C_a[W^{\pm}(z),\overline{D}^{\pm}_{Rn}]\le M_{10},\quad \||W_z|+|W_{\bar z}|\|_{L_{p_0}(D^{\pm}_{Rn})}\le M_{11},$$

$$C_{a_1}[\Pi(z)W^{\pm}(z),\overline{D}^{\pm}_{R}]\le M'_{10},\ a_1=a,\delta,\ M'_{10}=M'_{10}(q_0,p_0,D^{\pm},k,l_0,\nu,\Pi),$$

其中$a=\dfrac{p_0-2}{p_0}$，$M_j=M_j(q_0,p_0,D^{\pm},k,l_0,\nu,D^{\pm}_{Rn})$，$j=10,11$.

§4 方程（1.1）问题R的可解性

首先引进Banach空间$L_{\infty}(\overline{D}^{\pm}_{Rn})\times L_{p_0}(\overline{D}^{\pm}_{Rn})\times L_{p_0}(\overline{D}^{\pm}_{Rn})$ 中的有界闭凸集A，其范数为

$$\|\omega\|=\sup_{z\in D_{Rn}}|q(z)|+L_{p_0}(f(z),\overline{D}^{\pm}_{Rn}]+L_{p_0}[g(z),\overline{D}_{Rn}]$$

而A中的元素是满足下列条件的函数组$\omega=[q(z),f(z),g(z)]$：

(4.1) $$L_{\infty}[q(z),D_{Rn}]\le q_0,\ L_{p_0}[f(z),\overline{D}_{Rn}]\le k_0,\ L_{p_0}[g(z),D_{Rn}]\le k_0,$$

这里q_0是（1.3）中的常数，而k_0是（3.4）式中的常数M_5（即$k_0=M_5$）.

其次，设B是由D_{Rn}上满足条件

(4.2) $$\|f^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\le k_0,\quad \|g^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\le k_0,\quad \|h^*\|\le q_0|1+\Pi h^*|$$

的可测函数组$\Omega=[f^*(z),g^*(z),h^*(z)]$ 全体所构成的集合，其范数为

$$\|\Omega\|=\|f^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}+\|g^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}+\|h^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})},$$

易知它是Banach空间中的有界闭集.

定理4.1 设复方程（1.1）满足条件C，又（1.6）中常数ε适当小，则问题R是可解的.

证明 任取一函数组$w=[q(z),f(z),g(z)]\in A$，并考虑积分方程组

(4.3) $$h-q(z)\Pi h=q(z),\ \Pi h=-\frac{1}{\pi}\iint_{D_{Rn}}\frac{h(t)}{(t-z)^2}d\sigma_t,$$

(4.4) $$f^*=F(z,W^{\pm},\Pi f^*)-F(z,W^{\pm},0)+A_1(z,W^{\pm})(Tf^*-T_1f^*)+$$
$$A_2(z,W^{\pm})\overline{(Tf^*-T_1f^*)}+A_3(z,W^{\pm}).$$

(4.5) $$w^{\pm}g^*=F(z,W^{\pm},w^{\pm}\Pi g^*+\Pi f^*)-F(z,W^{\pm},\Pi f^*)+A_1(z,W^{\pm})w^{\pm}+A_2(z,W^{\pm})\overline{w^{\pm}},$$

(4.6) $$\Phi^{\pm\prime}(x)h^*e^{\varphi(z)}=F(z,W^{\pm},\Phi^{\pm\prime}(x)(1+\Pi h^*)e^{\varphi(z)}+w^{\pm}\Pi g^*+\Pi f^*)-$$
$$F(z,W^{\pm},w^{\pm}\Pi g^*+\Pi f^*)$$

其中$W^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}(x(z))e^{\varphi(z)}+\psi(z)=\Phi^{\pm}(x(z))e^{\varphi(z)}$，$\psi(z)$，$\varphi(z)$，$x(z)$ 如定理3.1中所述，由压缩原理，可从方程（4.3）求得唯一解$h(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$，然后如定理3.1可由$f(z),g(z)$，$h(z)$ 造出$\psi(z)=Tf-T_1f$，$\varphi(z)=Tg-T_1g$，$x(z)=z+Th-T_0h$. 根据引理2.2可知，在N $N+1$ 连通区域$G^{\pm}=x(D^{\pm})$ 上满足条件（3.2）、（3.3）的问题R_0的解$\Phi^{\pm}(x)$是存在且唯一的. 这样便得到函数$W^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}[x(z)]e^{\varphi(z)}+\psi(z)$，将$W^{\pm}(z)$ 代入（4.4），仿［9］引理3，可用连续性方法证明(4.4)有唯一解$f^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$，再将$W^{\pm}(z),w^{\pm}(z)=\Phi^{\pm}[x(z)]e^{\varphi(z)}$ 代入（4.5），由压缩映射原理又可从（4.5）求得唯一解$g^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$；最后将$W^{\pm}(z)$，$\Phi^{\pm}(z),\varphi(z)$ 代入（4.6），同理可求得唯一解$h^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$. 这样由方程（4.3）—（4.6）可确定$A$到$B$的一个映射，记此映射为$\Omega=\Omega(\omega)$. 下面证明$\Omega=\Omega(\omega)$ 是将A映射到B的连续算子.

将$\omega_k=[q_k(z),f_k(z),g_k(z)]\in A$，$k=0,1,\cdots$，且当$k\to\infty$时，$\|\omega_k-\omega_0\|=\sup|q_k-q_0|+\|f_k-f_0\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}+\|g_k-g_0\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$. 对应于$\omega_k$有下列积分方程：

$$(4.3)_1\qquad h_k-q_k(z)\Pi h_k=q_k(z),$$

$$(4.4)_1\qquad f_k^*=F(z,W_k^\pm,\Pi f_k^*)-F(z,W_k^\pm,0)+A_1(z,W_k^\pm)(Tf_k^*-T_1f_k^*)+A_2(z,W_k^\pm)\cdot\overline{(Tf_k^*-T_1f_k^*)}+A_3(z,W_k^\pm),$$

$$(4.5)_1\qquad w_k^\pm g_k^*=F(z,W_k^\pm,w_k^\pm\Pi g_k^*+\Pi f_k^*)-F(z,W_k^\pm,\Pi f_k^*)+A_1(z,W_k^\pm)w_k^\pm+A_2(z,W_k^\pm)\overline{w_n^\pm}$$

$$(4.6)_1\qquad \Phi_k^{\pm\prime}(x)h^*e^{\varphi_k^*(z)}=F(z,W_k^\pm,\Phi_k^\pm(x)(1+\Pi h_k^*)e^{\varphi_k^*}+w_k^\pm\Pi g_k^*+\Pi f_k^*)-F(z,W_k^\pm,w_k^\pm g_k^*+\Pi f_k^*),$$

其中$\varphi_k^*(z)=Tg_k^*-T_1g_k^*$. 由［8］引理3.1，知从方程（4.3)$_1$可导出$\|h_k-h_0\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$（当$k$（当$k\to\infty$），又由本文定理3.1与3.2可证：$W_k^\pm(z)=\Phi_k^\pm(x_k(z))e^{\varphi_k(z)}+\psi_k(z)$ 在D_{Rn}上一致收敛到$W_0^\pm(z)=\Phi_0^\pm[x_0(z)]e^{\varphi_0(z)}+\psi_0(z)$，因而当$k\to\infty$时$\|A_j(z,W_k^\pm)-A_j(z,W_0^\pm)\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$

（$j=1,2,3$）. 再根据条件（1.3）有：$\|F(z,W_k^\pm,\Pi f_k^*)-F(z,W_k^\pm,0)-F(z,W_0^\pm,\Pi f_0^*)++F(z,W_0^\pm,0)\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\leq q_0\|\Pi(f_k^*-f_0^*)\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}+\|C_k\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}$，其中

$$C_k(z)=F(z,W_k^\pm,\Pi f_0^*)-F(z,W_0^\pm,\Pi f_0^*)-F(z,W_k^\pm,0)+F(z,W_0^\pm,0),$$

且$\|C_k\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$（当$k\to\infty$）. 将对应于$k,0$的方程（4.4)$_1$相减，得到

$$f_k^*-f_0^*=F(0,W_k^\pm,\Pi f_k^*)-F(z,W_k^\pm,0)-F(z,W_0^\pm,\Pi f_0^*)+F(z,W_0^\pm,0)+A_1(z,W_k^\pm)\psi_k^*(z)-A_1(z,W_0^\pm)\psi_0^*(z)+A_2(z,W_k^\pm)\overline{\psi_k^*(z)}-A_2(z,W_0^\pm)\overline{\psi_0^*(z)}+A_3(z,W_k^\pm)-A_3(z,W_0^\pm),$$

可证：当$k\to\infty$时$\|f_k^*-f_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$. 对于方程（4.5)$_1$，由于$w_k^\pm,W_k^\pm$在$D_{Rn}^\pm$上分别一收敛到$w_0^\pm(z)$与$W_0^\pm(z)$，便可同样导出$\|g_k^*-g_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$（当$k\to\infty$），至于方程（4.6)$_1$，我们不妨设$\Phi_0^\pm(x)$不是常数. 由于$\Phi_k^{\pm\prime}(x)$在$x(D_k^\pm)$内任一闭域上一致收敛到$\Phi_0^{\pm\prime}(x)$，类似于（4.4)$_1$、与（4.5)$_1$也可证明$\|h_k^*-h_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$（当$k\to\infty$），因而当$k\to\infty$时，有$\|\Omega_k-\Omega_0\|\to 0$. 这就表明映射$\Omega=\Omega(\omega)$是连续的.

由上述可知，对$\omega=[q(z),f(z),g(z)]\in A$，能确定唯一的函数组$\Omega=[f^*(z),g^*(z),h^*(z)]=\Omega(\omega)\in B$. 再由（4.6），用下式确定$q^*(z)$：

$$(4.7)\qquad q^*(z)=\frac{h^*}{1+\Pi h^*}=\frac{F(z,W^\pm,\Phi^\pm(x)(1+\Pi h^*)e^\varphi+w^\pm\Pi g^*+\Pi f^*)}{\Phi^{\pm\prime}(x)(1+\Pi h^*)e^{\varphi(z)}}-\frac{F(z,W^\pm,w^\pm\Pi g^*+\Pi f^*)}{\Phi^{\pm\prime}(x)(1+\Pi h^*)e^{\varphi(z)}},$$

从条件（1.3）易知，在D_R上几乎处处有$|q^*(z)|\leq q_0<1$，因而得到$\omega^*=[q^*(z),f^*(z),g^*(z)]\in A$，从$\Omega$到$\omega^*$的映射记为$\omega^*=\omega(\Omega)$，又记$\omega=[q(z),f(z),g(z)]$到$\omega^*=[q^*(z),f^*(z),g^*(z)]$的映射为$\omega^*=T(\omega)$. 下面，我们证明$\omega^*=T(\omega)$把$A$连续映射到自身的紧集.

事实上，类似于［8］引理3.3，可证$\omega^*=T(\omega)$是连续映射，即由$\omega_k\in A$，$k=0,1,2,\cdots$且当$k\to\infty$时$\|\omega_k-\omega_0\|\to 0$可推出$\|\omega_k^*-\omega_0^*\|\to 0$（当$k\to\infty$）. 为证$\omega^*=T(\omega)$将$A$映射到自身的列紧集，任取$\omega_k=\{q_k(z),f_k(z),g_k(z)]\in A$，$k=1,2,\cdots$，则相应有

$\Omega_k=[f_k^*(z),g_k^*(z),h_k^*(z)]$及$\omega_k^*=[q_k^*(z),f_k^*(z),g_k^*(z)]\in A$．由定理3.1及3.2可知，从$\psi_k(z)$，$\varphi_k(z),x_k(z),\Phi_k^{\pm}[x_k(z)]$，$w_k^{\pm}(z),W_k^{\pm}(z)$ 可选取子序列，不妨设原序列分别在$D_{Rn}^{\pm}$内任一闭集上一致收敛到$\psi_0(z),\varphi_0(z),x_0(z),\Phi_0^{\pm}[x_0(z)],w_0^{\pm}(z),W_0^{\pm}(z)$；又从$\Phi_k^{\pm\prime}(z)$ 可选取子序列，不妨设原序列在$x_0(D_{Rn}^{\pm})$ 内任一闭集上一致收敛到$\Phi_0^{\pm\prime}(z)$．将对应于k,m的方程（4.4）$_1$ 相减，可证 $\|f_k^*-f_m^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$（当$k,m\to\infty$）．由于空间$L_{p_0}(D_{Rn})$的完备性可知，存在$f_0^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$ 使得当 $k\to\infty$时有 $\|f_k^*-f_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$；同理可证，存在$g_0^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$，$h_0^*(z)\in L_{p_0}(D_{Rn})$，$|q_0^*(z)|\le q_0<1$，使当$k\to\infty$时有$\|g_k^*-g_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$，$\|h_k^*-h_0^*\|_{L_{p_0}(D_{Rn})}\to 0$，$\sup|q_k^*-q_0^*|\to 0$．

由上述证明可知，$\omega^*=T(\omega)$ 将Banach空间的有界闭凸集A连续映到自身的列紧集，由Schauder不动点定理，则知存在一函数组$\omega^*=[q^*(z),f^*(z),g^*(z)]\in A$，使$\omega^*=T(w^*)$．又由前面算子$\Omega=\Omega(\omega)$ 的连续性证明可知，有函数组$\Omega^*=[f^*(z),g^*(z),h^*(z)]=\Omega(w^*)\in B$，而此组函数$f^*(z),g^*(z),h^*(z)$ 分别满足以下积分方程

$$(4.4)_2\qquad f^*=F(z,W^*,\Pi f^*)-F(z,W^*,0)+A_1(z,W^*)\psi^*+A_2(z,W^*)\overline{\psi^*}+A_3(z,W^*),$$

$$(4.5)_2\qquad w^*g^*=F(z,W^*,w^*\Pi g^*+\Pi f^*)-F(z,W^*,\Pi f^*)+A_1(z,W^*)w^*+A_2(z,W^*)\overline{w^*}$$

$$(4.6)_2\qquad \Phi^{*\prime}(x)h^*e^{\varphi^*}=F(z,W^*,\Phi^{*\prime}(x)(1+\Pi h^*)e^{\varphi^*}+w^*\Pi g^*+\Pi f^*)-F(z,W^*,w^*\Pi g^*+\\+\Pi f^*),$$

将以上三式相加，即得

$$(4.8)\qquad W_{\bar z}^*=F(z,W^*,W_z^*)$$

这表明$W^*(z)=\Phi^*(x(z))e^{\varphi^*(z)}+\psi^*(z)$ 是方程（1.1）的解，并满足边界条件（1.4）与（1.5），（1.8），故$W^*(z)$ 为方程（1.1）问题R于D_{Rn}上的解．

上述所论是在$D_{Rn}^{\pm}$上进行的．由于对不论怎样大的R，在$D_{Rn}^{\pm}$上方程（1.1）问题R的解$W_R^{\pm}(z)$ 均满足估计式（3.11），因此可以从$\{W_R^{\pm}(z)\}$中选取子序列在$D_n^{\pm}$上一致收敛于$W_0^{\pm}(z)$（$D_n^{\pm}$是$D^{\pm}$上距t_j 不小于$\frac{1}{n}$的点集，$j=1,2,\cdots,n$）．由［10］定理3.2可知$W_0^{\pm}(z)$是方程（1.1）问题R的解，由于D_n的任意性[12]，故$W_0^{\pm}(z)$ 便是复方程（1.1）问题R的解．

参 考 文 献

［1］Векуа И. Н.，广义解析函数，人民教育出版社，北京，1960．
［2］Гахов Ф. Д.，Краевые Задачи，Москва，1958．
［3］Мусхелишвили И.И.，奇异积分方程，上海科学技术出版社，1966．
［4］刘士强，武汉大学学报，1983，2:16—22．
［5］候宗义，数学学报，23(1980)，3:476—479．
［6］Begehr H.，Hile G. N.，Math. Z.，179，241—261(1982)．
［7］路见可，解析函数边值问题，上海科学技术出版社，1987．
［8］闻国椿，数学学报，23(1980)，2:244—255．
［9］李子植，李鸿振，河北大学学报（自然科学版），1982，2:61—67．
［10］闻国椿，河北化工学院学报（数学专辑），1980，41—61．

[11] Тюриков Е.В., ДАН СССР, 247(1979), 1068—1072.
[12] 闻国椿，纯粹数学与应用数学，1985（试刊号），113—121.

Discontiunous Riemann Boundary Value Problem for Nonlinear Elliptic Complex Equation of First Order

Yang guangwu Xu keming

(Hebei Institute of Chemical Technology, Shijiazhuang)

Abstract

The main purpose of this paper is to discuss the solvability of the discontinuous nonliaear Riemann boundary value problems for nonlinear elliptic system of first orde in a multiply connected domain. For this sake, we first employ the expression of solution fo the complex equation of first order, and give a priori estimations of the solution for discontinuous nonlinear Riemann problem. Thereafter we prove the solvability of this boundary value problem by using the continuity method and Schauder fixpoint theorem.