第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

块Toeplitz三角阵求逆及块Toeplitz三角线性方程组求解的复杂性*

游兆永 路浩

（西安交通大学数学系）

1. 引言

线性系统理论中，一个系统的可观测性与可控性及数据拟合中若干问题均化为Toeplitz矩阵的研究．近年来，有关Toeplitz矩阵，Toeplitz三角阵，块Toeplitz矩阵及块Toeplitz三角阵的性质及相应算法的研究有了很大的进展（[1]、[2]、[3]、[4]）．早在1964，1965年，W.F.Trench[5]、[6]给出n阶Toeplitz矩阵求逆算法，计算复杂性为$O(n^2)$，S.Zohar（1974）[7]给出n阶Toeplitz线性方程组求解算法计算复杂性为$O(n^2)$．特别地，对于具有特殊结构的Toeplitz三角阵求逆及Toeplitz三角线性方程组求解的复杂性研究取得了实质性进展，[3]、[8]中给出了计算复杂性为$O(n\log^2 n)$的算法，这些算法的建立均依据多项式的快速乘法与快速除法．而就Toeplitz三角阵本身的结构形式讨论甚少．

本文从块Toeplitz三角阵自身结构出发，首先把块Toeplitz三角阵求逆问题化为线性递归关系，利用FFT（快速富里叶变换）求得块Toeplitz三角阵的逆矩阵，证明了块Toeplitz三角阵$U=(U_0, U_1, \cdots, U_{n-1})$，$U_i(i=0,1,\cdots,n-1)$为$m$阶方阵，求逆的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^3)$．特别地，对$n$阶Toeplitz三角阵求逆的计算复杂性为$O(n\log n)$．并由此证明了块Toeplitz三角线性方程求解的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^3)$．特别地，对n阶Toeplitz三角线性方程组求解的计算复杂性为$O(n\log n)$．进一步讨论了多项式除法的计算复杂性问题．用Toeplitz三角阵快速求逆与多项式快速相乘算法，把多项式

$$A(x)=a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-1}\ (a_0\neq 0)$$
$$B(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\quad (b_0\neq 0)$$

$A(x)\div B(x)$的计算复杂性由原来的$O(n\log^2 n)$降为$O(n\log n)$．

本文中O_k表示k阶零方阵．I_k表示k阶单位阵，k为正整数，$V_i(i=1,2,\cdots,P)$是$m_i\times k$矩阵．形式地记

$$(V_1, V_2, \cdots, V_p)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\\vdots\\V_p\end{pmatrix}$$

* 1986年12月16日收到．

特别地，$e_1=(I_m,O_m,\cdots,O_m)^{\mathrm{T}}$．$e_n=(O_m,\cdots,O_m,I_m)^{\mathrm{T}}$，其中$m$阶零矩阵的个数为$n-1$．

2．几个命题

矩阵

$$U=\begin{bmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_{n-1} \\ & U_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & U_1 \\ & & & U_0 \end{bmatrix} \qquad L=\begin{bmatrix} L_0 & & & \\ L_1 & L_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ L_{n-1} & \cdots & L_1 & L_0 \end{bmatrix}$$

分别称为块Toeplitz上三角阵与块Toepltz下三角阵．其中U_i，$L_i(i=0,1,\cdots,n-1)$为m阶方阵．简记为

$$U=(U_0,U_1,\cdots,U_{n-1}),\quad L=[L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}]$$

引理2.1 设U，L分别为块Toeplitz上三角阵与块Toeplitz下三角阵

$$U=(U_0,U_1,\cdots,U_{n-1})\qquad L=[L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}]$$

$$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}\qquad Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}}$$

且

$$UX=e_n \tag{2.1}$$

$$LY=e_1 \tag{2.2}$$

其中U_i，$L_i(i=0,1,\cdots,n-1)$，$X_j,Y_j(j=1,2,\cdots,n)$为m阶方阵．则U，L可逆．其逆矩阵为

$$U^{-1}=(X_n,X_{n-1},\cdots,X_1),\qquad L^{-1}=[Y_1,Y_2,\cdots,Y_n].$$

证明 由(2.1)式

$$UX=(U_0X_1+U_1X_2+\cdots+U_{n-1}X_n,U_0X_2+\cdots+U_{n-2}X_n,\cdots,U_0X_n)^{\mathrm{T}}=(O_m,\cdots,O_m,I_m)^{\mathrm{T}},$$

则

$$\begin{aligned} &U(X_n,X_{n-1},\cdots,X_1)\\ &=(U_0X_n,U_0X_{n-1}+U_1X_n,\cdots,U_0X_1+U_1X_2+\cdots+U_{n-1}X_n)=I_{nm}, \\ &U^{-1}=(X_n,X_{n-1},\cdots,X_1). \end{aligned}$$

同理 $L^{-1}=[Y_1,Y_2,\cdots,Y_n]$．

形如

$$T=\begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \cdots & T_{n-1} \\ T_{-1} & T_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_1 \\ T_{-n+1} & \cdots & T_{-1} & T_0 \end{bmatrix}$$

的矩阵称为块Toeplitz矩阵．其中$T_i(i=-n+1,\cdots,n-1)$为m阶方阵．

引理2.2 矩阵积Ub，Lb，Tb的计算复杂性为$O((m^2+mq)n\log n+nm^2q)$，这里$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$为$m\times q$矩阵．

证明 $Ub=(U_0b_1+U_1b_2+\cdots+U_{n-1}b_n,U_0b_2+\cdots+U_{n-2}b_n,\cdots,U_0b_n)$，$Ub$中第$i+1$块$m\times q$子阵（暂称$Ub$的第$i+1$个分量）为矩阵多项式$f(x)=U_0+U_1X+\cdots+U_{n-1}x^{n-1}$，$g(x)=b_n+b_{n-1}x+\cdots+b_1x^{n-1}$ 之积$f(x)g(x)$中x^{n-i}的系数($i=0,1,\cdots,n-1$)．设

$$f(x)g(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_{2n-2}x^{2n-2},\quad d_i=\sum_{\substack{i+j=k\\0\le i,j\le n-1}}U_ib_{n-j}\ .$$

令$N=2n$，作叙列

$$U(k)=\begin{cases}U_k & 0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0 & n-1<k\leqslant N-1\end{cases},\qquad B(k)=\begin{cases}b_{n-k} & 0\leqslant k\leqslant n-1\\ 0 & n-1<k\leqslant N-1\end{cases}.$$

把$U(k)$、$B(k)$扩充成以N为周期的序列

$$U(k+lN)=U(k),\quad B(k+lN)=B(k)\quad(k=0,1,\cdots,N-1,\ l\text{为任意整数}).$$

作$U(k)$，$B(k)$的卷积 $D(k)=\sum_{i=0}^{N-1}U(i)B(k-i)\ (k=0,1,\cdots,N-1)$，则

$$D(k)=D_k\quad(k=0,1,\cdots,2n-2).$$

定义序列

$$X(k)=\sum_{i=0}^{N-1}U(i)\omega_N^{ik}\quad(k=0,1,\cdots,N-1),\tag{2.3}$$

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{N-1}B(i)\omega_N^{ik}\quad(k=0,1,\cdots,N-1),\tag{2.4}$$

$$Z(k)=X(k)Y(k)\quad(k=0,1,\cdots,N-1),\tag{2.5}$$

其中 $\omega_N=\cos\frac{2n}{N}+i\sin\frac{2n}{N}$为$N$次单位根．则$Z(k)$的逆变换为

$$D(k)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Z(i)\omega_N^{-ik},\tag{2.6}$$

这是因为

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Z(i)\omega_N^{-ik}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}U(j)\omega_N^{ji}\sum_{l=0}^{N-1}B(l)\omega_N^{li}\omega_N^{-ik}$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}U(j)\sum_{l=0}^{N-1}B(l)\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\omega_N^{(j+l-k)i}.$$

当 $j+l-k$为N的倍数时，$\sum_{i=0}^{N-1}\omega_N^{(j+l-k)i}=N$．当$j+l-k$不是$N$的倍数时

$$\sum_{i=0}^{N-1}\omega_N^{(j+l-k)i}=\frac{1-\omega_N^{(j+l-k)N}}{1-\omega_N^{j+l-k}}=0.$$

由于$0\leqslant j,l,k\leqslant N-1$，故$j+l-k$为$N$的倍数只可能是0或$N$．若$j+l-k=0$，$l=k-j$．若$j+l-k=N$，$l=N+k-j$．两种情况均有$B(l)=B(k-j)$（$B(k)$的周期性，故

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}Z(i)\omega_N^{-ik}=\sum_{j=0}^{N-1}U(j)B(k-j)=D(k).$$

设

$$U(k)=(u_{ij}^{(k)})_{m\times m},\quad B(k)=(b_{ij}^{(k)})_{m\times q},\quad X(k)=(x_{ij}^{(k)})_{m\times m}$$
$$Y(k)=(y_{ij}^{(k)})_{m\times q},\quad Z(k)=(z_{ij}^{(k)})_{m\times q},\quad D(k)=(d_{ij}^{(k)})_{m\times q},$$
$$(k=0,1,\cdots,N-1).$$

由(2.3),(2.4),(2.6)式，矩阵$X(k)$,$Y(k)$,$D(k)$($k=0,1,\cdots,N-1$)的元素可由下式计算而得

$$\begin{bmatrix}x_{ij}^{(0)}\\ x_{ij}^{(1)}\\ \vdots\\ x_{ij}^{(N-1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega_N & \omega_N^{N-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{(N-1)^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{ij}^{(0)}\\ u_{ij}^{(1)}\\ \vdots\\ u_{ij}^{(N-1)}\end{bmatrix}\quad(i,j=1,2,\cdots,m),\tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} y_{ij}^{(0)} \\ y_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ y_{ij}^{(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{ij}^{(0)} \\ b_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{ij}^{(N-1)} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$(i=1,2,\cdots,m,\ \ j=1,2,\cdots,q)$,

$$\begin{bmatrix} d_{ij}^{(0)} \\ d_{ij}^{(1)} \\ \vdots \\ d_{ij}^{(N-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \cdots & \omega_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{ij}^{(0)} \\ z_{ij}^{(2)} \\ \vdots \\ z_{ij}^{(N-1)} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,q)$.

通过(2.7)式用FFT求所有矩阵$X(k)$的计算复杂性为$m^2O(N\log N)$. 同样由(2.8)求所有$Y(k)$的计算复杂性为$mqO(N\log N)$. 用矩阵的普通乘法求所有$Z(k)$, 计算复杂性为$NO(m^2q)$. 用快速富里叶逆变换由(2.9)式求所有$D(k)$计算复杂性为$mqO(N\log N)$. 这样, 求矩阵积Ub的计算复杂性为$m^2O(N\log N)+2mqO(N\log N)+NO(m^2q)$, 即$O((m^2+mq)n\log n+nm^2q)$.

同理: 矩阵积Lb的计算复杂性为$O((m^2+mq)n\log n+nm^2q)$.

对块Toeplitz矩阵T, 设$T=U'+L'$. 其中U', L'分别为块Toeplitz上三角阵与块Toeplitz下三角阵 $Tb=(U'+L')b=U'b+L'b$.求出$U'b$与$L'b$后, 完成$(U'b)+(L'b)$只需nmq次加法运算. 由此矩阵积Tb的计算复杂性为$O((m^2+mq)n\log n+nm^2q)$.

由引理2.2的证明过程不难得

推论2.1 设多项式

$$f(x)=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\cdots+q_n,\ \ g(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_n,$$

则$f(x)$与$g(x)$之积的计算复杂性为$O(n\log n)$.

3. 块Toeplitz三角阵求逆与块Toeplitz三角方程组求解的复杂性分析

本节以块Toeplitz上三角阵为例, 其块Toeplitz下三角阵的讨论完全类同.

设 $U=(U_0,U_1,\cdots,U_{n-1})$, 若$U_0$为$m$阶非奇矩阵, 则$U$非奇异, 反之亦然. 首先假设$n=2^k$, 由引理2.1, U的求逆问题转化为方程

$$UX=e_n \tag{3.1}$$

的求解. 设$U_0=U=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ & U_{11} \end{vmatrix}$, $X=\begin{vmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{vmatrix}$, 其中$U_{11}$为$\frac{n}{2}m$阶块Toeplitz上三角矩阵, U_{12}为$\frac{n}{2}m$阶块Toeplitz矩阵, X_{11}, X_{12}为$\frac{n}{2}m$行m列矩阵. 则(3.1)可分解为 $U_{11}X_{12}=e_{n/2}$, $X_{11}=-U_{11}^{-1}U_{12}X_{12}$. 一般地

$$U_{i-1,1}=\begin{vmatrix} U_{i1} & U_{i2} \\ & U_{i1} \end{vmatrix},\ X_{i-1,2}=\begin{vmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \end{vmatrix},$$

其中 U_{i1}为$(n/2^i)m$阶块Toeplitz上三角阵, U_{i2}为$(n/2^i)m$阶块Toeplitz矩阵, X_{i1}, X_{i2}为$(nm/2^i)\times m$矩阵. 方程 $U_{i-1,1}X_{i-1,2}=e_{n/2^{i-1}}$ 分解为

$$U_{i1}X_{i2}=e_{n/2^i},\ \ X_{i1}=-U_{i1}^{-1}U_{i2}X_{i2},\ (i=1,2,\cdots,k),\ X_{k2}=U_0^{-1} \tag{3.2}$$

由此可求得(3.1)的解$X=(X_{11},X_{21},\cdots,X_{k1},X_{k2})^T$. 即得到$U$的逆矩阵$U^{-1}$.

用一般求矩阵逆阵的方法求得U_0^{-1}，计算复杂性为$O(m^3)$. 对固定i，考察$X=-U_{i1}^{-1}U_{i2}X_{i2}$. 由引理2.2，求得$U_{i2}X_{i2}$的计算复杂性为$O(m^2\frac{n}{2^i}\log\frac{n}{2^i}+\frac{n}{2^i}m^3)$. 同样求得$U_{i1}^{-1}(U_{i2}X_{i2})$的计算复杂性为$O(m^2\frac{n}{2^i}\log\frac{n}{2^i}+\frac{n}{2^i}m^3)$. 由此求$U^{-1}$的计算复杂性为

$$O(m^3)+\sum_{i=1}^{k}2O(m^2\frac{n}{2^i}\log\frac{n}{2^i}+\frac{n}{2^i}m^3)$$

$$=O(m^3)+\sum_{i=1}^{k}2O(m^2 2^{k-i}(k-i)+2^{k-i}m^3)=O(m^2 2^k k+2^k m^3)=O(m^2 n\log n+nm^3).$$

对一般n，取k满足$2^{k-1}<n\leqslant 2^k$，$N=2^k$. 考察块Toeplitz上三角阵$A=(U_0, U_1, \cdots, U_{n-1}, O_m, \cdots, O_m)$，其中$m$阶零矩阵的个数为$2^k-n$. 记 $A=\begin{bmatrix} U & B \\ & C\end{bmatrix}$，$B$为$mn\times m(2^k-n)$矩阵，$C$为$(2^k-n)m$阶块Toeplitz上三角阵. 由$A$的结构知，当且仅当$U$可逆时$A$可逆，且
$A^{-1}=\begin{vmatrix} U^{-1} & D \\ & C^{-1}\end{vmatrix}$. 由上述讨论知，求得$A^{-1}$的计算复杂性为$O(m^2 2^k k+2^k m^3)$. 而 $\log n\leqslant k\leqslant\log n+1$，故求得$U^{-1}$的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^3)$.

定理3.1 块Toeplitz三角阵$U=(U_0, U_1, \cdots, U_{n-1})$的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^3)$，其中$U_i(i=0,1,\cdots,n)$为$m$阶方阵.

特别地，n阶Toeplitz三角阵求逆的计算复杂性为$O(n\log n)$

线性方程

$$Ux=b \tag{3.3}$$

称为块Toeplitz三角线性方程，其中U为块Toeplitz三角阵，$U=(U_0, U_1, \cdots, U_{n-1})$，$U_i(i=0,1,\cdots,n-1)$为$m$阶方阵.

若U非奇异，则方程(3.3)的解为$x=U^{-1}b$. 由引理2.1，U^{-1}为块Toeplitz三角阵，由定理3.1求得U^{-1}的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^3)$. 应用引理2.2，完成矩阵与向量积$U^{-1}b$的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^2)$. 由此得

推论3.1 块Toeplitz三角方程组(3.3)求解的计算复杂性为$O(m^2 n\log n+nm^2)$，特别地，n阶Toeplitz三角方程组求解的计算复杂性为$O(n\log n)$.

设多项式

$$A(x)=a_0x^{2n-1}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-1}\quad(a_0\neq 0),$$
$$B(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\quad(b_0\neq 0).$$

引理3.1[8] 多项式除法$x^{2n-1}\div B(x)$称为预计算. 若不计预计算的运算量，则多项式除法$A(x)\div B(x)$的计算复杂性为$O(n\log n)$.

推论3.2 多项式除法$A(x)\div B(x)$的计算复杂性为$O(n\log n)$.

证明 由引理3.1,我们只需证明预计算的计算复杂性不超过$O(n\log n)$即可.

用$\partial(F(x))$表示多项式$F(x)$的阶数，设预计算

$$x^{2n-1}=B(x)D(x)+S(x),\ \partial(D(x))=n-1,\ \partial(S(x))\leqslant n-1,$$

Toeplitz三角阵 $B=(b_0, b_1, \cdots, b_n)$. 由于$b_0\neq 0$，则$B$非奇异. 设

$B^{-1}=(c_0, c_1, \cdots, c_n)$,

$BB^{-1}=(b_0c_0, b_0c_1+b_1c_0, \cdots, b_{n-1}c_0+\cdots+c_{n-1}b_0, b_nc_0+\cdots+b_0c_n)=I_{n+1}$.

下证 $D(x)=D_1(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$. 这是因为

$$B(x)D_1(x)=b_0c_0x^{2n-1}+(b_0c_1+b_1c_0)x^{2n-2}+\cdots+$$
$$(b_0c_{n-1}+\cdots+b_{n-1}c_0x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_0$$
$$=x^{2n-1}+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0 ,$$
$$x^{2n-1}=B(x)D_1(x)+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0 .$$

则 $\partial(D_1(x))=n-1$, $\partial(S_1(x))\leqslant n-1$, 且

$$x^{2n-1}=B(x)D_1(x)+S_1(x) .$$

由多项式分解的唯一性定理， $D(x)=D_1(x)$, $S(x)=S_1(x)$.

由定理3.1求得$D(x)$的计算复杂性为$O(n\log n)$,

$$S(x)=x^{2n}-B(x)D(x) .$$

由推论2.1 求得$B(x)D(x)$的计算复杂性为$O(n\log n)$. 由(3.4)可得$S(x)$. 这样完成预计算的计算复杂性为$O(n\log n)$.

参 考 文 献

[1] Asher Ben Arti and Tamir Shalom, Linear Algebra Appl.. Vol 75(1986), pp.173—192.
[2] Tailath and I. Koltracht , Linear Algebra Appl., Vol75(1986), pp.145—154.
[3] Dario Bini, SIAM. J. Comput., Vol13. No.2(1984), pp.268—276.
[4] T. N. E. Greville Linear Algebra Appl., Vol55(1983), pp.87—92.
[5] W. F. Trench, SIAM. J. Comput., Vol12, No.3(1964), pp.515—522.
[6] W. F. Trench, SIAM. J.Comput., Vol13, No.4(1965), pp.1102—1107.
[7] S. Zohar, ACM. J.Computer, Vol21, No.2(1974), pp.272—276.
[8] 游兆永, 线性代数与多项式快速算法, 上海科技出版社(1983), pp.85—95.
[9] M. Pease, J. Assoc. Comput. Mach., Vol25(1968), pp.252—264.

Complexity of Inversion of Block Triangular Toeplitz Matrices and Solution of Block Triangular Toeplitz Linear Systems

You Zhaoyong and Lu Hao

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract

In this paper, it is showed that the computational complexity of inversion of block triangular Toeplitz matrix $U=(U_0, U_1, \cdots, U_{n-1})$ is $O(m^2n\log n+m^3)$, as well as solution of block trianglar Toeplitz linear systems, where U 's are $m\times m$ matrices. By using this results, we reduce arithmetic operations of division of polynomials from $O(n\log^2n)$ to $O(n\log n)$.