第9卷 第1期
1988年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

H_q^p ($0<p<1$, $q>1$) 空间中的多项式最佳逼近问题*

沈燮昌　　邢富冲

(北京大学数学系)　　(中央民族学院数学系，北京)

如果函数$f(z)$在单位圆$|z|<1$内解析，而且对于参数p、q满足条件

$$\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{q-2}|f(z)|^p d\sigma_z<+\infty,$$

其中$z=x+iy$，$d\sigma_z=dxdy$，我们就说函数$f(z)$属于H_q^p，并把H_q^p类函数的集合称为H_q^p空间．由于积分$\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{q-2}d\sigma_z$仅对$q>1$收敛，因而在上述定义中要求$q>1$．

文献〔1〕给出了H_q^p空间中函数的积分表达式，〔2〕、〔3〕、〔4〕在〔1〕的基础上研究了当$p\geq 1$时H_q^p空间的一些性质，〔5〕研究了当$0<p<1$时H_q^p空间中导函数的模与函数本身的积分连续模之间关系的Hardy-Littlewood 定理，本文将研究当$0<p<1$时关于H_q^p空间多项式最佳逼近阶的估计的正定理和逆定理，所得到的结果，在形式上恰是$p=1$的情况向$0<p\leq 1$情况的推广．

本文使用下述记号：$\|f(z)\|^p=\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{q-2}|f(z)|^p d\sigma_z$，$\hat{\omega}(t,f)=\sup_{-t\leq h\leq t}\{\|f(ze^{ih})-f(z)\|\}$，$\rho^{(n)}(f)=\inf_{Q_n(z)\in H_n}\{\|f(z)-Q_n(z)\|\}$，其中$H_n$表示由所有次数不超过$n$的代数多项式组成的集合．

文中研究的区域有时不是单位圆，而是以原点为中心的某个圆环形区域D，那时我们将用角标加以注明，即：$\|f(z)\|_D^p\overset{\text{def}}{=\!=}\iint_D(1-|z|^2)^{q-2}|f(z)|^p d\sigma_z$．

本文以C_p表示仅依赖于p的常数．不同的地方出现的C_p的值未必相同．例如，既使$C_p\neq 0$，我们仍可写$2C_p=C_p$，文中将不再对此加以说明．

§1 正定理

引理1 如果函数$F(z)\in H^p$（$0<p<1$，Hardy空间），则对于$0\leq r<\rho\leq 1$存在常数C_p使得$M_1(r,F)\leq C_p(\rho-r)^{1-\frac{1}{p}}M_p(\rho,F)$，其中$M_p(r,F)=\left[\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}$．

* 1986年12月22日收到．

证明 见文献〔6〕.

定理1 对一切$f(z)\in H_q^p(0<p<1,\ q>1)$有$\rho^{(n)}(f)\le C_p\widehat{\omega}(\frac{1}{n},f)$.

证明 我们知道，(c,α)算子对于任意$\alpha>-1$及$0<\rho<1$把函数$f(z)\in H_q^p$映为n次代数多项式（参阅〔6〕）

$$\sigma_n^\alpha(z,f)=\frac{(A_n^\alpha)^{-1}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}f(z\zeta)\zeta^{-(n+1)}\left(\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right)^{1+\alpha}d\zeta, \qquad (1)$$

其中
$$A_n^\alpha=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

在（1）中取$f(z)\equiv1$，则有 $\frac{(A_n^\alpha)^{-1}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^{-(n+1)}\left(\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right)^{1+\alpha}d\zeta=1$. 由此可得

$$f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)=\frac{(A_n^\alpha)^{-1}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^{-(n+1)}[f(z)-f(z\zeta)]\left(\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right)^{\alpha+1}d\zeta. \qquad (2)$$

明显可知

$$F(\zeta)\xlongequal{\text{def}}[f(z)-f(z\zeta)]\left(\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right)^{\alpha+1}\in H^p(0<p<1),$$

于是由引理1可得

$$|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)|^p\le\left[\frac{(A_n^\alpha)^{-1}}{2\pi}\right]^p\left(\int_{-\pi}^{\pi}\rho^{-n}|f(z)-f(z\zeta)|\left|\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right|^{\alpha+1}d\theta\right)^p$$

$$\le C_p(A_n^\alpha\rho^n)^{-p}(1-\rho)^{p-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z)-f(ze^{i\theta})|^p\left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right|^{(\alpha+1)p}d\theta$$

$$=C_p(A_n^\alpha\rho^n)^{-p}(1-\rho)^{p-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(z)-f(ze^{i\theta})|^p\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^{(\alpha+1)p}d\theta,$$

从而有

$$\|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)\|^p$$

$$\le C_p(A_n^\alpha\rho^n)^{-p}(1-\rho)^{p-1}\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{q-2}d\sigma_z\int_{-\pi}^{\pi}|f(z)-f(ze^{i\theta})|^p\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^{(\alpha+1)p}d\theta.$$

利用Fubini定理得

$$\|f(z)-\sigma_n^\alpha(z,f)\|^p\le C_p(A_n^\alpha\rho^n)^{-p}(1-\rho)^{p-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^{(\alpha+1)p}d\theta\iint_{|z|<1}(1-|z|^2)^{q-2}$$

$$\cdot|f(z)-f(ze^{i\theta})|^p d\sigma_z\le C_p(A_n^\alpha\rho^n)^{-p}(1-\rho)^{p-1}\int_0^{\pi}\widehat{\omega}^p(\theta,f)\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^{(\alpha+1)p}d\theta. \qquad (3)$$

现在，对于确定的$p\in(0,1)$取定$\alpha=\frac{3}{p}-1$，并利用不等式$|\sin n\theta|\le n|\sin\theta|$ $(n=1,2,\cdots)$及 $\sin t\ge\frac{2}{\pi}t$ $(0\le t\le\frac{\pi}{2})$，可得

$$\int_0^{\pi}\widehat{\omega}^p(\theta,f)\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^{(a+1)p}d\theta\leq\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)\int_0^{\pi}\left[\frac{\theta}{\pi}(n+1)+1\right]\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^3d\theta$$

$$\leq\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\right]\left[\frac{\theta}{\pi}(n+1)+1\right]\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|^3d\theta$$

$$\leq\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left[\frac{\theta}{\pi}(n+1)+1\right](n+3)^3d\theta+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\left[\frac{\theta}{\pi}(n+1)+1\right]\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^3d\theta\right\}$$

$$\leq\frac{3}{2}\pi(n+1)^2\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right). \tag{4}$$

再取定$\rho=1-\frac{1}{2(n+1)}$，则由（3）式与（4）式可得

$$\|f(z)-\sigma_n^a(z,f)\|^p\leq C_p(A_n^a)^{-p}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]^{-np}[2(n+1)]^{1-p}3\pi(n+1)^2\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)$$

$$\leq C_p\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{np}(n+1)^{3-p}(A_n^a)^{-p}\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)$$

$$\leq C_pe^{\frac{p}{2}}(n+1)^{3-p}(A_n^a)^{-p}\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)$$

$$=C_p(n+1)^{3-p}(A_n^a)^{-p}\widehat{\omega}^p\left(\frac{\pi}{n+1},f\right). \tag{5}$$

又，由$\Gamma(a)=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^an!\left[\prod\limits_{k=0}^{n}(a+k)\right]^{-1}$知，存在自然数$n_0$使得只要$n>n_0$就有

$(n+1)^an!\left[\prod\limits_{k=0}^{n}(a+k)\right]^{-1}<2\Gamma(a)$．因而，只要取

$$C_p=\max\left\{2\Gamma(a),(n+1)^an!\left[\prod_{k=0}^{n}(a+k)\right]^{-1}(n=1,2,\cdots,n_0)\right\}$$

就对一切自然数n都有$(n+1)^an!\left[\prod\limits_{k=0}^{n}(a+k)\right]^{-1}\leq C_p$，从而有

$$(A_n^a)^{-1}\leq\frac{C_p}{(n+1)^a}. \tag{6}$$

由（5）、（6）两式可得

$$\|f(z)-\sigma_n^a(z,f)\|\leq C_p(n+1)^{\frac{3}{p}-1}(A_n^a)^{-1}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)$$

$$\leq C_p(n+1)^a\cdot(n+1)^{-a}\widehat{\omega}\left(\frac{\pi}{n+1},f\right)\leq C_p\widehat{\omega}\left(\frac{1}{n},f\right).$$ 定理1证毕．

引理2 若函数$f(z)$在$|z|<1$内解析，而且$f'(z)\in H_q^p(0<p<1,\ q>1)$，则$f(z)\in H_q^p(0<p<1,\ q>1)$．

证明 对于$z=re^{i\theta}$，$0\leq r<1$，我们有 $f(z)-f(0)=\int_0^r \frac{\partial}{\partial r}f(re^{i\theta})\mathrm{d}r$ $=\int_0^r e^{i\theta}f'(re^{i\theta})\mathrm{d}r$，$|f(z)-f(0)|\leq\int_0^r|f'(re^{i\theta})|\mathrm{d}r\leq r\sup\limits_{0\leq t\leq r}|f'(te^{i\theta})|$。于是，由文献〔7〕的定理1.9可得

$$\|f(z)-f(0)\|^p\leq\int_0^1 r(1-r^2)^{q-2}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}r^p\sup_{0\leq t\leq r}|f'(te^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta$$

$$\leq C_p\int_0^1 r(1-r^2)^{q-2}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta=C_p\|f'(z)\|^p\ .$$

由Frechet空间的三角形不等式可得 $\|f(z)\|^p\leq C_p\|f'(z)\|^p+\|f(0)\|^p<+\infty$。引理2证毕。

定理2 对一切$f^{(k)}(z)\in H_q^p(0<p<1,q>1)$及任意自然数$n\geq 2$有 $\rho^{(n)}(f)\leq\frac{C_p}{n^k}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},f^{(k)})$，其中$k$是非负整数。

证明 我们使用数学归纳法。$k=0$的情况即定理1。

假设当$k=m$时命题成立（m是一个非负整数），我们来研究当$k=m+1$时的情况。此时的条件是$f^{(m+1)}(z)\in H_q^p(0<p<1,q>1)$，要证明对于任意自然数$n\geq 2$有

$$\rho^{(n)}(f)\leq\frac{C_p}{n^{m+1}}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)}).$$

由条件知此时有$[f'(z)]^{(m)}\in H_q^p(0<p<1,q>1)$。按归纳法假设，我们有

$$\rho^{(n-1)}(f')\leq\frac{C_p}{(n-1)^m}\widehat{\omega}(\frac{1}{n-1},\ (f')^{(m)})\quad(n\geq 2)$$

$$\leq\frac{2^mC_p}{n^m}\widehat{\omega}(\frac{2}{n},\ f^{(m+1)})\leq\frac{C_p}{n^m}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)}).$$

这说明存在次数不超过$n-1$的多项式$Q_{n-1}(z)$满足不等式 $\|f'(z)-Q_{n-1}(z)\|\leq\frac{C_p}{n^m}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)})$。记$F(z)=f(z)-\int_0^z Q_{n-1}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$，则有

$$\|F'(z)\|\leq\frac{C_p}{n^m}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)})\overset{\mathrm{def}}{=\!=}M(n)<+\infty,$$

由引理2知$F(z)\in H_q^p(0<p<1,\ q>1)$。注意到由文献〔5〕可得 $\widehat{\omega}(\tau,F)\leq C_pM(n)\tau$，于是由定理1可得

$$\rho^{(n-1)}(F)\leq C_p\widehat{\omega}(\frac{1}{n-1},\ F)\leq C_p\frac{1}{n-1}M(n)$$

$$\leq\frac{2C_p}{n}\cdot\frac{C_p}{n^m}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)})=\frac{C_p}{n^{m+1}}\widehat{\omega}(\frac{1}{n},\ f^{(m+1)}).$$

由于$\int_0^z Q_{n-1}(\zeta)\mathrm{d}\zeta$是一个确定的$n$次多项式，显然有$\rho^{(n)}(f)\leq\rho^{(n-1)}(F)$。这说明当$k=m+1$时命题成立。定理2证毕。

§2 逆定理

引理3 对任意的n阶三角多项式$T_n(\theta)$有

$$\int_0^{2\pi}|T_n'(\theta)|^p d\theta \le C_p n^p \int_0^{2\pi}|T_n(\theta)|^p d\theta, \quad 0<p<1.$$

证明 见文献〔8〕.

定理3 对任意的n次代数多项式$P_n(z)$有$\|P_n'(z)\| \le C_p \frac{n}{r_0}\|P_n(z)\|$，其中$0<p<1$，$q>1$，$r_0=\min\{\frac{1}{2}, (2\sqrt{|2q-3|})^{-1}\}$.

证明 由$\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(re^{i\theta})=ire^{i\theta}P_n'(re^{i\theta})$，利用引理3可得

$$\int_0^{2\pi} r^p|P_n'(re^{i\theta})|^p d\theta \le C_p n^p \int_0^{2\pi}|P_n(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

在上式两边同时乘以$r(1-r^2)^{q-2}$并对r从r_0到1积分可得

$$r_0^p\|P_n'(z)\|^p_{r_0<|z|<1} \le \int_{r_0}^1 r^{p+1}(1-r^2)^{q-2}dr\int_0^{2\pi}|P_n'(re^{i\theta})|^p d\theta$$

$$\le C_p n^p\int_{r_0}^1 r(1-r^2)^{q-2}dr\int_0^{2\pi}|P_n(re^{i\theta})|^p d\theta = C_p n^p\|P_n(z)\|^p_{r_0<|z|<1},$$

由此可得

$$\|P_n'(z)\|^p \le 2\|P_n'(z)\|^p_{r_0<|z|<1} \le C_p\frac{n^p}{r_0^p}\|P_n(z)\|^p_{r_0<|z|<1} \le C_p\frac{n^p}{r_0^p}\|P_n(z)\|^p,$$

两边开p次方可得$\|P_n'(z)\| \le C_p\frac{n}{r_0}\|P_n(z)\|$. 定理3证毕.

定理4 设函数$\Omega(u)$对于$u\ge 0$单调上升，积分$\int_0^t \frac{\Omega^p(u)}{u}du$收敛，而且对于一切自然数$n$都存在$2^n$次多项式$P_{2^n}(z)$满足不等式

$$\|f(z)-P_{2^n}(z)\| \le \frac{A}{2^{nm}}\Omega(\frac{1}{2^n}), \quad 0<p<1, \quad q>1,$$

其中m是一个非负整数，A是一个与n无关的常数(*)，则有$f^{(m)}(z)\in H_q^p(0<p<1, q>1)$，而且有不等式

$$\tilde{\omega}^p(t, f^{(m)}) \le A[t^p\int_t^1\frac{\Omega^p(u)}{u^{p+1}}du+\int_0^t\frac{\Omega^p(u)}{u}du].$$

证明 我们先证明$f^{(m)}(z)\in H_q^p(0<p<1, q>1)$. $m=0$的情况已由文献〔3〕证明，下面证明$m\ge 1$的情况.

考虑多项式级数$\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(z)$，其中$Q_0(z)=P_1(z)$，$Q_n(z)=P_{2^n}(z)-P_{2^{n-1}}(z)$，$n=1, 2, \cdots$. 显然，$Q_n(z)$是次数不超过$2^n$的多项式.

(*) 本文从此处开始以A表示与n无关的常数，不同地方的A值未必相同.

我们将证明，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n^{(v)}(z)$ $(v=0,1,2,\cdots, m)$ 部分和序列是$H_q^p(0<p<1, q>1)$空间中的Cauchy 列．事实上，由定理3，我们有

$$\begin{aligned}\|Q_n^{(v)}(z)\|^p &= \|P_{2^n}^{(v)}(z)-P_{2^{n-1}}^{(v)}(z)\|^p \leq (C_p\frac{2^n}{r_0})^{pv}\|P_{2^n}(z)-P_{2^{n-1}}(z)\|^p \\ &\leq (C_p\frac{2^n}{r_0})^{pv}[\|f(z)-P_{2^n}(z)\|^p+\|f(z)-P_{2^{n-1}}(z)\|^p] \\ &\leq (C_p\frac{2^n}{r_0})^{pv}[\frac{A}{2^{pnm}}\Omega^p(\frac{1}{2^n})+\frac{A}{2^{p(n-1)m}}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})] \\ &\leq (C_p\frac{2^n}{r_0})^{pv}\frac{2A}{2^{p(n-1)m}}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}}) \\ &\leq \frac{(C_p)^v A\cdot 2^{mp+1}}{r_0^{pv}}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}}) = A\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}}). \quad (n\geq 1) \qquad (7)\end{aligned}$$

积分$\int_0^t \frac{\Omega^p(u)}{u}du$ 收敛保证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^n})$收敛，故对任意$\varepsilon>0$，存在自然数$k_0$使得对于一切自然数$t>k>k_0$和一切$v=0,1,2,\cdots, m$有

$$\|\sum_{n=k+1}^{t} Q_n^{(v)}(z)\|^p \leq \sum_{n=k+1}^{t}\|Q_n^{(v)}(z)\|^p \leq A\sum_{n=k+1}^{t}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})<\varepsilon. \qquad (8)$$

（8）式说明，$\{\sum\limits_{n=0}^{N} Q_n^{(v)}(z)\}_{N=1}^{\infty}$ $(v=0,1,2,\cdots, m)$ 都是$H_q^p(0<p<1, q>1)$空间中的Cauchy 列．由文献〔3〕的定理1可知，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n^{(v)}(z)$在单位圆内闭一致收敛于某个函数$f_v(z)\in H_q^p$，且在$H_q^p$意义下平均收敛于$f_v(z)$ $(v=0,1,2,\cdots, m)$．

设E是单位圆内任一闭集．文献〔3〕的定理3证明 $\sum\limits_{n=0}^{N} Q_n(z) \rightrightarrows f_0(z)\equiv f(z), z\in E$, $N\to\infty$．故由Weierstrass 定理可知$\sum\limits_{n=0}^{N} Q_n^{(v)}(z) \rightrightarrows f^{(v)}(z)$, $N\to\infty$, $v=0,1,2,\cdots, m$．由极限的唯一性可得$f_v(z)\equiv f^{(v)}(z)$, $|z|<1$, $v=0,1,2,\cdots, m$，所以

$$f^{(m)}(z)\in H_q^p(0<p<1, q>1).$$

为了推出关于$\widehat{\omega}^p(t, f^{(m)})$的估计式，我们研究

$$\begin{aligned}&\|f^{(m)}(ze^{ih})-f^{(m)}(z)\|^p \\ &\leq \|f^{(m)}(ze^{ih})-\sum_{n=0}^{k} Q_n^{(m)}(ze^{ih})\|^p+\|\sum_{n=0}^{k}[Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)]\|^p+\|f^{(m)}(z)-\\ &-\sum_{n=0}^{k} Q_n^{(m)}(z)\|^p,\end{aligned}$$

其中k可为任一自然数．

对（8）式使用Fatou 引理可得$\|\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} Q_n^{(v)}(z)\|^p=\|f^{(v)}(z)-\sum\limits_{n=0}^{k} Q_n^{(v)}(z)\|^p$ $\leq \varliminf\limits_{t\to\infty}\|\sum\limits_{n=k+1}^{t} Q_n^{(v)}(z)\|^p \leq A\sum\limits_{n=k+1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})$, $v=0,1,2,\cdots, m$．取$v=m$则有

$$\|f^{(m)}(ze^{ih})-f^{(m)}(z)\|^p\leq A\sum_{n=k+1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})+\|\sum_{n=0}^{k}[Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)]\|^p \quad (9)$$

对于（9）式不等号右边第二项，利用文献［5］的一个引理及本文定理3 可得

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{k}[Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)]\|^p&\leq\sum_{n=0}^{k}\|Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)\|^p\\&=\sum_{n=0}^{k}\int_0^1 r(1-r^2)^{q-2}dr\int_0^{2\pi}|Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)|d\theta\\&\leq\sum_{n=0}^{k}C_p|h|^p\int_0^1 r(1-r^2)^{q-2}dr\int_0^{2\pi}|Q_n^{(m+1)}(re^{i\theta})|^p d\theta\\&=\sum_{n=0}^{k}C_p|h|^p\|Q_n^{(m+1)}(z)\|^p\\&\leq\sum_{n=0}^{k}\frac{C_p2^{np}}{r_0^p}|h|^p\|Q_n^{(m)}(z)\|^p\\&=\frac{C_p|h|^p}{r_0^p}\sum_{n=0}^{k}2^{np}\|Q_n^{(m)}(z)\|^p.\end{aligned}$$

利用（7）式可以进一步得到 $\|\sum_{n=0}^{k}[Q_n^{(m)}(ze^{ih})-Q_n^{(m)}(z)]\|^p\leq\frac{C_p|h|^p}{r_0^p}[\|P_1^{(m)}(z)\|^p+2^{np}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})]$，代入（9）式可得

$$\|f^{(m)}(ze^{ih})-f^{(m)}(z)\|^p\leq A\sum_{n=k+1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})+A|h|^p[1+\sum_{n=1}^{k}2^{np}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})]. \quad (10)$$

到此为止，k 为任意的自然数，h 可为任意实数．由于（10）式右边各项都关于 $|h|$ 单调上升，而可得 $\widehat{\omega}^p(t,f^{(m)})\leq A\sum_{n=k+1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})+At^p[1+\sum_{n=1}^{k}2^{np}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})]$．

现在我们假定 $t\leq\frac{1}{2}$，则对于确定的 t 存在确定的自然数 k 满足$2^{-k}<t\leq2^{-(k-1)}$，并且有

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})\leq\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}}\frac{\Omega^p(u)}{u}du\leq\int_0^t\frac{\Omega^p(u)}{u}du$$

$$\sum_{n=1}^{k}2^{np}\Omega^p(\frac{1}{2^{n-1}})\leq\sum_{n=1}^{k}\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}}\frac{\Omega^p(u)}{u^{p+1}}du=\int_{2^{-k}}^{1}\frac{\Omega^p(u)}{u^{p+1}}du$$

$$=\int_{2^{1-k}}^{2}\frac{\Omega^p(\frac{u}{2})}{(\frac{u}{2})^{p+1}}d(\frac{u}{2})\leq A(\int_t^1+\int_1^2)\frac{\Omega^p(u)}{u^{p+1}}du,$$

因而对于 $0\leq t\leq\frac{1}{2}$ 可得 $\widehat{\omega}^p(t,f^{(m)})\leq A[t^p\int_t^1\frac{\Omega^p(u)}{u^{p+1}}du+\int_0^t\frac{\Omega^p(u)}{u}du]$．利用不等式 $\widehat{\omega}^p(\lambda t)\leq(\lambda+1)\widehat{\omega}^p(t)$，$\lambda$ 为任一正实数可以把关于 $\omega^p(t,f^{(m)})$ 的估计式从 $t\leq\frac{1}{2}$ 推广到大于 $\frac{1}{2}$．定理4 证毕．

推论 如果函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z|<1$ 内解析，而且对于一切自然数 n 有 2^n 次多项式 $P_{2^n}(z)$ 满足条件 $\|f(z)-P_{2^n}(z)\|\leq\frac{A}{2^{n(m+a)}}$，$0<a\leq1$，$0<p<1$，$q>1$，其中 m 是一个非负整数，A 是一个与 n 无关的常数，则有 $f^{(m)}(z)\in H_q^p$，而且有估计式

$$\widehat{\omega}(t, f^{(m)}) \leq \begin{cases} At^{a}, & 0<a<1, \\ At(1+\ln\frac{1}{t})^{\frac{1}{p}}, & a=1. \end{cases}$$

这是在定理4中取$\Omega(u)=u^{a}$而得到的结果.

参 考 文 献

[1] Charles K. Chui and Xie-Chang Shen, Constr. Approx. 1(1985): 121—135.

[2] Xing Fuchong and Su Chaolung, Journal of Xinjiang University, Vol.3, No.3(1986), p.49—56.

[3] Xing Fuchong and Su Chaolung, Iuverse Theorems to the Best Approximation by Polynomias in H^p_q Space, to appear.

[4] Xing Fuchong and Su Chaolund, Best Approximation by Rational Functions with Fixed Poles in H^p_q Space, to appear.

[5] 沈燮昌、邢富冲、张有光，数学季刊，Vol.2, No.4(1987), p. 1～18.

[6] Э.А.Стороженко, Серия Математическая, Т.44, No.4(1980), p.946～962.

[7] P. L. Duren, Theory of H^p Space, Acadmic Press, New York and London, 1970.

[8] В. И. Иванов, Мат. Заметки, Т.18 No.4(1975), p.489—498.

The Best Approximation by Polynomials in $H^p_q(0<p<1, q>1)$ Spaces

Shen Xiechang (Peking University)

Xing Fuchong (Central Institute for National Minorities)

Abstract

In this paper, we obtained two direct theorems and a inverse theorem on the best approximation by polynomials in $H^p_q(0<p<1, q>1)$ spaces. The results obtained in this paper are just some direct extensions from the case $p=1$ to the case $0<p\leq 1$ in their forms.