第9卷 第1期 数学研究与评论 Vol.9 No.1
1989年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb, 1989

关于图的Hamilton性*

刘彦佩

（中国科学院应用数学研究所，北京）

Ⅰ. 预备结果

凡未作解释的术语均可参考Bondy和Murty的书[1].

一个图$G=(V,E)$，如果满足如下的性质A和B，则称之为核心图．所有核心图的集合记为$\mathscr{C}$．

性质A 存在一个整数$k\geqslant1$使得：(i) $V=V_0+V_1+\cdots+V_k$；(ii) $G[V-V_0]=G[V_1]+G[V_2]+\cdots+G[V_k]$；(iii) $G[V_i]$，$1\leqslant i\leqslant k$，对于任何二个节点$u,v\in V_i$，只要有$x,y\in V_0$且$(u,x),(v,y)\in E$，则在u,v之间有一条Hamiltom路；(iv) $G[V_0]=K_{|V_0|}$，即完全图；和 (v) V_0中的任一节点至多与V_i，$1\leqslant i\leqslant k$，中的二个相邻．

性质B 对于任何$S\subseteq V$，$S\neq\phi$，均有$c(G[V-S])\leqslant|S|$，其中$c(H)$表示图H中的连通片的数目．

首先，我们引进如下的一些命题．

命题1.1 设C是一个仅由一个圈组成的图．则，$C\in\mathscr{C}$．

证 记$C=(v_0,v_1,\cdots,v_s)$．只要取$V_0=\{v_0,v_1\}$，$V_1=\{v_2,v_3,\cdots,v_s\}$．容易验证，满足性质A和B．

对于$X\subseteq V$，记$N(X)=\{v\in V-X\mid\exists u\ni X\in(v,u)\in E\}$．

命题1.2 对于所有$i\geqslant1$，均有$N(V_i)\subseteq V_0$．

证 实为性质A(ii)的直接结果．

命题1.3 在所有V_i，$1\leqslant i\leqslant k$，中，无有一个只有一个节点与V_0相邻．

证 用反证法，由性质B和A(ii)可得．

命题1.4 不存在$S\subseteq V_0$，$s=|S|\geqslant1$ 使得有$N(V_{i_1}+V_{i_2}+\cdots+V_{i_s})\subseteq S$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<$ $<i_s\leqslant k$．

证 用反证法，由性质B和A(ii) 即得．

命题1.5 对于任何$G\in\mathscr{C}$，存在一个边对的叙列。如

$$(u_1,x_1),(v_1,y_1);(u_2,x_2),(v_2,y_2);\ \cdots;\ (u_k,x_k),(v_k,y_k) \tag{1.1}$$

使得$u_i,v_i\in V_i$，x_i，$y_i\in V_0$且$u_i\neq v_i$，$x_i\neq y_i$，$i=1,2,\cdots,k$．

证 实为命题1.3和1.4的直接结果．

* 1986年11月22日收到．

在这个命题中，由（1.1）所确定的V_0中的一个节点对叙列

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \cdots;\ x_n, y_k \tag{1.2}$$

称为接触节点叙列，或简称AV－叙列．同时，叙列（1.1）称为接触边对叙列，或简称AE－叙列．如果一个图,它的闭包（与〔1〕定义的相同）有一个支撑子图属于$\mathscr{C}$，则称这个图为适约的．

定理1.6 一个图G有Hamilton圈的充要条件是G为适约的．

Ⅱ．定理的证明

对于$G\in\mathscr{C}$的任何一个AV一叙列，我们可以构造一个辅助图$G^*=K_{|V^*|}$如下

$$V^*=\{v^*=\{x_i, y_i\}\,|\,i=1,2,\ \cdots,\ k\}.$$

且，将G^*中的边(v_i^*, v_j^*)，$v_i^*\cap v_j^*\neq\phi$给以标记．G^*的所有带标记的边所生成的子图称为带标记的子图．

引理2.1 对于$G\in\mathscr{C}$的任一AV一叙列，其辅助图的带标记子图的连通片不是路就是圈．

证 由性质A(v)，在带标记的子图中所有节点的次至多为2．从而，引理成立．

引理2.2 对于任一$G\in\mathscr{C}$，存在一个辅助图G^*使得其带标记的子图的所有连通片全是路．$|V_0|=k$例外．

证 如果对于$G\in\mathscr{C}$的任一AV一叙列，其辅助图的带标记子图总有一个连通片是圈．可以假设G^*是使其带标号子图具有最少的圈的辅助图．并，设

$$(v_{i_1}^*,\ v_{i_2}^*,\ \cdots,\ v_{i_s}^*),\quad v_{i_j}^*=(x_{i_j},\ y_{i_j}),\quad y_{i_{j-1}}=x_{i_j},$$

$j=1,2,\cdots,\ s$，$y_{i_0}=y_{i_s}$，是G^*的带标记子图的一个圈．如果$N(V_{i_1}+V_{i_2}+\cdots+V_{i_s})=\{x_{i_1},\ x_{i_2},\ \cdots,\ x_{i_s}\}=\{y_{i_1},\ y_{i_2},\ \cdots,\ y_{i_s}\}=W$，则由于$W\neq V_0$，有$c(G[V-W])=|W|+1>|W|$．与性质B矛盾．否则，在G中存在一条边$(u,x)$(或$(v,\ y)$)使得$u$(或$v$)$\in V_{i_1}+V_{i_2}+\cdots+V_{i_s}$，而$x$(或$y$)$\bar{\in}W$．且，由性质A(v)可知$x$不与这个带标记子图的任何一个圈关联．从而，用$(u,x)$(或$(v,\ y)$)代替$(u_{i_j},\ x_{i_j})$(或$(v_{i_j},\ y_{i_j})$)，对于某$j$，$1<j<s$，$u$(或$v$)$\in V_{i_j}$，可得一个新的辅助图，其带标记的子图中圈的数目比原来的少．又与G^*的最小性矛盾．

引理2.3 对于$G\in\mathscr{C}$，$k\neq|V_0|$，一个辅助图G^*有一个Hamilton圈通过其带标记子图的所有边，当且仅当这个带标记的子图无圈．

证 必要性，显然．

充分性可用如下的事实论证．即，在一个完全图中，有一个Hamilton圈通过任何一组节点不公共的路．然，这一点可容易地用构造性的方法证明．

引理2.4 对于$G\in\mathscr{C}$，$k=|V_0|$，其任一辅助图的带标记子图全是一个圈．

证 由性质A(v)和$k=|V_0|$，在带标记的子图中，所有节点的次皆2．进而，由命题1.4，即得引理．

引理2.5 对于$G\in\mathscr{C}$，G是Hamilton图，当且仅当G有一个辅助图G^*且G^*有一个Hamilton圈过其带标记子图的所有边．

证 Ⅰ．$k\neq|V_0|$．首先，可以看出：在G中有一个Hamilton圈C使得

$$C\cap(V_0,\ V_i)=\{(u_i, x_i),(v_i, y_i)\}, \tag{2.1}$$

其中，$(V_0,\ V_i)=\{(w,\ z)\in E\,|\,w\in V_i,\ z\in V_0\}$，$i=1,2,\cdots,\ k$．因为，否则可设C使得$V_i$，$i=1,2,\cdots,\ k$，中不满足（2.1）的最少．且，记C具有形式：

$$C=(R_0 p,\ x_i,\ u_i\Omega_1 w_1,\ z_1 R_1 z_2,\ \cdots,\ z_{2l+1} R_l z_{2l+2},\ w_{2l+2}\Omega_{l+1} v_i,\ y_i),$$

$w_0=u_i,\ w_{2l+3}=v_i,\ l\geqslant 0,\ w_{2t}\Omega_t w_{2t+1}\subseteq G[V_i],\ R_t\cap G[V_i]=\phi,\ 0\leqslant t\leqslant l,\ 1\leqslant i\leqslant k$．然，可将C变为G上的另一个Hamilton圈$C'$如下：

$$C'=(x_i,\ u_i\Omega v_i,\ y_i R_0 p,\ z_1 R_1 z_2,\ \cdots,\ z_{2l},\ z_{2l+1} R_l z_{2l+2}),$$

其中$u_i\Omega v_i$为$G[V_i]$中的一个Hamilton路．由性质A(iii)，这种路存在．不过，这时的C'中不满足（2.1）的V_i $1\leqslant i\leqslant k$的数目比C中的少一个．与C的最小性矛盾．从而，由引理2.3，G^*中有一条Hamilton圈过其带标记子图的所有边．

反之，从G^*的一个过其所有带标记边的Hamilton圈，由性质A(iv)，可以求出$G[V_0]$中的一个Hamilton圈C_0过所有$(x_i,\ y_i)\in E$，$i=1,2,\cdots,\ k$．实际上，$\{x_i,\ y_i\}$，$1\leqslant i\leqslant k$，皆G^*的节点．则，在C_0上用$(x_i,\ u_i\Omega_i v_i,\ y_i)$代替$(x_i,\ y_i)$，由性质A(iii)取$u_i\Omega_i v_i$为$G[V_i]$中的Hamilton路，$i=1,2,\cdots,\ k$．即得G中的一个Hamilton圈．

Ⅱ．$k=|V_0|$．根据引理2.4，上述情形所用的方法也可用于这一情形．

至此，我们来证明定理1.6．由命题1.1，必要性显然．

下面来证充分性．可以只考虑图的闭包．而且，由适约性可只讨论$G\in\mathscr{C}$．对于任何$G\in\mathscr{C}$，由引理2.2和引理2.4，存在一个辅助图G^*，它的带标记的子图根据$k\neq|V_0|$与否决定仅由节点不公共的路，或仅由一个圈组成．进而，由引理2.3和引理2.5，即得定理．

Ⅲ．几　点　注　记

注记3.1　可以依如下三步骤设计一个算法求任一$G\in\mathscr{C}$中的一个Hamilton圈．

1．求G的一个辅助图G^*使得它的带标记子图的所有连通片皆路，或当$k=|V_0|$时，即为一个圈．

2．求G^*中的一个Hamilton圈使过所有的带标记的边．这是很容易做的．

3．基于G^*中的已得的Hamilton圈，求G中的一个Hamilton圈．

而且，用上面得到的结果，不难论证，这个算法是有效的，即多项式时间的，当且仅当在所有较小的图$G[V_i]$，$1\leqslant i\leqslant k$，中求Hamilton路是有效的．

注记3.2　通常，取$G[V_i]$，$i=1,2,\cdots,\ k$，为一些熟知的图，如$K_{|V_i|}$；$K_{|V_i|}-K_2$，$|V_i|\geqslant 6$；$K_{|V_i|}-K_3$，$|V_i|\geqslant 8$；等等．在这些图中，求Hamilton路是非常容易的．

注记3.3　Dirac和Ore在这方面的定理均可视为定理1.6的直接推论．一些更强些的结果，包括最近所发表的结果[2]，均不难从这个定理导出．

参　考　文　献

〔1〕Bondy, J. A., and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan, London, 1976.

〔2〕Fan Geng-hua, J. Comb. Theory (B), 37(1984), 221-227.

On tne Hamiltonianity of a Graph

Liu Yanpei

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper provides a necessary and sufficient condition of a graph being Hamiltonian. On the sufficiency, it is surely wider than that of the closure being the complete graph. Therefore, all the conditions related to the closure being the complete graph, e.g., Dirac's, Ore's et al, and some others with the closure being not the complete graph, especially the one obtained recently by Fan can be easily derived.