第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

# 典型群的正规子群和同余子群问题*

李福安

（中国科学院数学研究所，北京）

正规子群和同余子群问题，是研究典型群的一个重要方向．（参见文献[1—7].）这个问题的研究，最初是为了确定典型群的正规群列，并找出典型群系列中的单群．现在研究这个问题，主要是为了搞清环上典型群的构造，以及自同构和同构问题．本文对近年来这方面的结果进行综述，并讨论其发展方向．

域和体上的情形比较简单．以线性群为例，我们有以下的

**定理1** 设K是体，$n\geq 2$．则$PSL_n(K)$是单群，除开$PSL_2(F_2)\cong S_3$和$PSL_2(F_3)\cong A_4$两个例外情形．

**定理1′** 设K是体，$n\geq 2$，H是$GL_n(K)$的正规子群．则H包含在$GL_n(K)$的中心里，或H包有$SL_n(K)$，除开$n=2$且$K=F_2$或$F_3$两个例外情形．

**定理1″** 设K是体，$n\geq 2$，H是$GL_n(K)$的子群，在$SL_n(K)$下不变．则H包含在$GL_n(K)$的中心里，或H包有$SL_n(K)$，除开$n=2$且$K=F_2$或$F_3$两个例外情形．

对域上的辛群和正交群以及体上的酉群，有类似的结果（见[1]）．为了讨论环上的情形，先引进一些记号（采用H. Bass[8]）．

设A是含1的结合环，q是A的理想．

令$E_n(A)$为一切初等矩阵$e_{ij}(a)$，$i\neq j$，$a\in A$，所生成的群，称为A的初等群．显然，若A为体，则$E_n(A)=SL_n(A)$．

令$E_n(q)$为一切$e_{ij}(x)$，$i\neq j$，$x\in q$，所生成的群．令$E_n(A,q)$为$E_n(A)$中由$E_n(q)$生成的正规子群．

我们有自然同态$\lambda_q$：$GL_n(A)\to GL_n(A/q)$．

令$GL_n(A,q)=\ker\lambda_q$，并规定$GL_n(A,A)=GL_n(A)$．

令$GL'_n(A,q)=\lambda_q^{-1}(GL_n(A/q)$的中心$)$，并规定$GL'_n(A,A)=GL_n(A)$．特别，$GL'_n(A,0)$恰为$GL_n(A)$的中心．

$E_n(A,q)$，$GL_n(A,q)$和$GL'_n(A,q)$称为同余子群．根据上述定义，显然有

* 1986年12月14日收到．国家自然科学基金资助的课题．

* 1986年10月30日在中国数学会第二届全国代数学学术交流会上报告．

$$E_n(A,q)\lhd E_n(A),\quad GL_n(A,q)\rhd GL_n(A),\quad GL'_n(A,q)\lhd GL_n(A),$$

而定理1，定理1′和定理1″对环不再成立．

利用上述记号，定理1″可改述为：

设K是体，$n\geqslant 2$，H是$GL_n(K)$的子群，在$E_n(K)$下不变．则$1=E_n(K,0)\subseteq H\subseteq GL'_n(K,0)$，或$E_n(K,K)\subseteq H\subseteq GL'_n(K,K)=GL_n(K)$，除开两个例外情形．

易知上面两个包含关系不能同时成立，故存在唯一的理想q使

$$E_n(K,q)\subseteq H\subseteq GL'_n(K,q).$$

我们希望这一结果能推广到环上．首先，利用$g\to\begin{pmatrix} g & \\ & 1\end{pmatrix}$，可定义嵌入$GL_n(A)\to GL_{n+1}(A)$．令$GL(A)=\varinjlim GL_n(A)$，$E(A)=\varinjlim E_n(A)$，$E(A,q)=\varinjlim E_n(A,q)$，$GL(A,q)=\varinjlim GL_n(A,q)$及$K_1(A,q)=GL(A,q)/E(A,q)$．H. Bass[8]证明了

**定理2** (a) 设H是GL(A)的子群，在E(A)下不变．则存在唯一的理想q使$E(A,q)\subseteq H\subseteq GL(A,q)$．

(b) 设H是GL(A)的子群，q是A的理想，满足(a)中的包含关系．则$E(A,q)=[E(A),H]=[GL(A),H]\subseteq H$．特别，$H\lhd GL(A)$．

这个定理称为Sandwich定理．也就是说，$H\lhd GL(A)\Leftrightarrow$ H在E(A)下不变$\Leftrightarrow$H夹在E(A,q)和GL(A,q)之间，对唯一的一个理想q．因此，确定GL(A)的全部正规子群，就相当于计算所有的$K_1(A,q)$．

$A^m$的元$(a_1,\cdots,a_m)$称为幺模元(unimodular)，若$Aa_1+\cdots+Aa_m=A$．

A称为满足稳定性条件$SR_n(A)$，若对任意的$m\geqslant n$和任意幺模元$(a_1,\cdots,a_m)\in A^m$，存在$b_1,\cdots,b_{m-1}\in A$，使$(a_1+b_1a_m,\cdots,a_{m-1}+b_{m-1}a_m)$是$A^{m-1}$中的幺模元．

Bass[8]证明了

**定理3** 设$n\geqslant 3$且$SR_n(A)$成立，H是$GL_n(A)$的子群．则H在$E_n(A)$下不变当且仅当存在唯一的理想q，使$E_n(A,q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A,q)$．

下面，把H在$E_n(A)$下不变$\Leftrightarrow$存在唯一的理想q使$E_n(A,q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A,q)$这一叙述记为(*)．Wilson[9]，Голубчик[10]和Суслин[11]分别证明了以下结果：

**定理4** 设A是交换环，$n\geqslant 4$．则(*)成立．

**定理5** 设A是交换环，$n\geqslant 3$．则(*)成立．

Vaserstein[12]证明了更一般的结果：

**定理6** 设$n\geqslant 3$，R是A的中心．若对任一$M\in\max R$，存在乘法子集$S\subseteq R-M$，使$SR_n(S^{-1}A)$满足，则(*)成立．此时有

$$\begin{aligned}E_n(A,q)&=[E_n(A),E_n(q)]=[E_n(A),E_n(A,q)]\\&=[E_n(A),H]=[E_n(A),GL'_n(A,q)]=[GL_n(A),E_n(A,q)].\end{aligned}$$

这是迄今为止这方面的最好结果．虽然条件显得繁琐，但有许多重要推论，例如定理3和定理5，以及

**推论** 设$n\geqslant 3$．若A是其中心R上的有限生成模，则(*)成立．

这个推论所包含的一种重要情形就是群环RΠ，其中R为交换环，Π为有限群．(群环是代数K理论中最丰富的思想来源之一)．

下面讨论Sandwich定理的几个推广及今后可以开展工作的方向．

一、非交换环和交换环在正规子群问题上表现出很大的差异．对于交换环而言，当$n\geqslant 3$时，（$*$）成立．Петечук[13]证明，若A是交换环且$n\geqslant 3$，则$E_n(A)$是$GL_n(A)$的特征子群．但若A不是交换环，则$E_n(A)$甚至可以不是$GL_n(A)$的正规子群． Хлебутин[14]提供了由Герасимов给出的一个例子：设$x_{ij}, y_{ij}(1\leqslant i, j\leqslant n)$是域F上的$2n^2$个非交换未定元，$A=F\langle x_{ij}, y_{ij}\rangle/(XY=YX=I_n)$，其中$XY=YX=I_n$是以矩阵形式表示的$2n^2$个关系式，则对任意的$n\geqslant 3$，$E_n(A)$不在$GL_n(A)$中正规．

对于某些特殊的非交换环，已有了一些结果．Vaserstein对Banach代数和von Neumann正则环进行了讨论[15]、[16]．

**定理7** 设A为Banach代数或von Neumann正则环（或更一般地，A/radA是Neumann正则环），$n\geqslant 3$．则（$*$）成立．

王路群[17]讨论了强右Ore环（即对任$a, b\in A$，存在$c\in A$使$ab=bc$），并证明

**定理8** 设A为强右Ore环，$n\geqslant 3$．H是$GL_n(A)$的子群，在$E_n(A)$下不变．则存在理想q使

$$E_n(A, q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A, q).$$

二、关于在$E_n(A, \mathfrak{a})$下不变的子群问题．

一般地说，对$GL_n(A)$的任一子群H，总存在最大的理想L（H）和最小的理想J（H）满足

$$E_n(A, L(H))\subseteq H\subseteq GL'_n(A, J(H)),$$

其中J（H）就是H的阶．若H不是$E_n(A)$-不变，而是在一个相对初等群$E_n(A, \mathfrak{a})$不变，那么，$\mathfrak{a}$，L（H）和J（H）之间有什么关系？这个问题是Bak[18]首先研究的．他证明了

**定理9** 设A是交换环，$n\geqslant 3$且$SR_n(A)$成立．H是$GL_n(A)$的子群，在$E_n(A, \mathfrak{a})$下不变．则存在理想q使

$$E_n(A, q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A, (q:\mathfrak{a}^{24})).$$

（即$J(H)\mathfrak{a}^{24}\subseteq L(H)$.）进而，q对于理想上的一个等价关系是唯一确定的．

作为定理9的一个应用，我们有

**推论** 设F是整体域，$n\geqslant 3$，H是$GL_n(F)$的一个非中心子群．若H被$GL_n(F)$的一个算术子群所正规化，则H本身包含$GL_n(F)$的一个算术子群．

李福安和刘木兰[19]取消了定理9中所要求的稳定性条件$SR_n(A)$，证得

**定理10** 设A是交换环，$n\geqslant 3$．H是$GL_n(A)$的子群，在$E_n(A, \mathfrak{a})$下不变．则存在理想q使

$$E_n(A, q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A, (q:\mathfrak{a}^{40})).$$

q对于理想上的一个等价关系唯一确定．

上面的定理5是定理10的一个直接推论．

最近，Vaserstein[20]得到了更好的结果：

**定理11** 设A是交换环，$n\geqslant 3$．H是$GL_n(A)$的子群，在$E_n(A, \mathfrak{a})$下不变．则$J(H)\mathfrak{a}^6\subseteq L(H)$，即存在q使

$$E_n(A, q)\subseteq H\subseteq GL'_n(A, (q:\mathfrak{a}^6)).$$

讨论被$E_n(A, \mathfrak{a})$正规化的子群，有助于研究线性群的次正规（subnormal）子群的问题（参见[20].）．

三、设$\sigma_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$是A的理想．$\sigma=\{\sigma_{ij}\}$称为A的一个理想网格(net)，若满足$\sigma_{ij}\sigma_{jk}\subseteq\sigma_{ik}$，$\forall i,j,k$．令$E(\sigma)$是由一切初等矩阵$e_{ij}(x)$，$i\neq j$，$x\in\sigma_{ij}$，所生成的群．这是相对初等群$E_n(A,q)$的推广．设$v$是集合$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个等价关系．定义$[v]=\{[v]_{ij}\}$，其中$[v]_{ij}=A$，若$(i,j)\in v$；$[v]_{ij}=0$，若$(i,j)\notin v$．Golubchik[21]讨论了$GL_n(A)$的被$E([v])$所正规化的子群．对于一般的理想网格$\sigma$，讨论被$E(\sigma)$所正规化的子群，将是一个更广泛的课题．

四、对于$n\geqslant 3$的讨论，Steinberg关系式

$$e_{ij}(a)e_{ij}(b)=e_{ij}(a+b),$$
$$[e_{ij}(a),e_{jk}(b)]=e_{ik}(ab),\quad i\neq k,$$
$$[e_{ij}(a),\ e_{kl}(b)]=1,\ i\neq l,j\neq k,$$

是极为有用的工具．当$n=2$时，即使A是交换环，$E_2(A)$也不一定在$GL_2(A)$中正规(见[22])，被$E_2(A)$正规化的子群问题也远未解决，因为此时活动余地太小，Steinberg关系式只剩下$e_{ij}(a)e_{ij}(b)=e_{ij}(a+b)$一个．目前对情形$n=2$已有的一些结果，大都是对交换环加上较强的限制(如局部环，半局部环，φ满射环，再附加2是可逆元的条件，或者要求A中有足够多的可逆元)．(见[23—26]．)讨论$n=2$时(*)成立的充要条件，是一个有意义而又困难的问题．

五、环上其他典型群的正规子群问题．

环上辛群、正交群和酉群可以纳入一般酉群(也叫伪正交群)的统一形式．

$(A,\lambda,\Lambda)$称为一个酉环，若A是带有对合(即阶$\leqslant 2$的反自同构，$a\in A$的象记为$\bar{a}$)的环；$\lambda$属于A的中心，满足$\lambda\bar{\lambda}=1$．记$S_{-\lambda}(A)=\{a-\lambda\bar{a}\mid a\in A\}$，$S^{-\lambda}(A)\{a\in A\mid a=-\lambda\bar{a}\}$．$\Lambda$是A的一个加法子群，满足$S_{-\lambda}(A)\subseteq\Lambda\subseteq S^{-\lambda}(A)$及$ar\bar{a}\in\Lambda$，$\forall a\in A$，$r\in\Lambda$．

对于酉环$(A,\lambda,\Lambda)$上的二次模M，可以定义酉群$U(M)$．特别，若M是秩为$2n$的双曲模，则有双曲酉群$U_{2n}^{\lambda}(A,\Lambda)$．进而，若A上的对合但恒同映射(此时A必交换)，且$(A,\lambda,\Lambda)$为$(A,-1,A)$或$(A,1,0)$，则分别得到通常意义下的辛群和正交群(参阅[27—29]．)．

和线性群的情形一样，可以定义$U^{\lambda}(A,\Lambda)=\varinjlim U_{2n}^{\lambda}(A,\Lambda)$．Bass[27]得到了类似于定理2的结果．

对于$U_{2n}^{\lambda}(A,\Lambda)$的正规子群和同余子群的研究，目前只见到Vaserstein一篇论文的预印本[30]．他对Banach代数证明了类似于定理7的结果．

对于环上辛群，在对环作了若干限制的情形下，已有一些结果(见[31—34]．)．其中[31]的结果如下：

**定理12** 设R是交换的φ满射环，即存在子集$X_0\subseteq X=\max R$，使自然同态$R\to\prod\limits_{M\in X_0}R/M$是满的，且$\bigcup\limits_{M\in X_0}M=\bigcup\limits_{M\in X}M$．若$n\geqslant 3$，或$n=2$且$R/M\neq F_2$，$\forall M\in X_0$，则$Sp_{2n}(R)$的正规子群问题有肯定解答当且仅当$aR=a^2R+2aR$ $\forall a\in R$．

六、典型群的同构理论——Sandwich定理的一个应用．

Петечук[13]证明了当$n\geqslant 4$时交换环上的一般线性群、特殊线性群以及初等群的任一自同构都具有标准形，这是Sandwich定理的一个成功应用．李福安和李尊贤[35]将Sandwich定理用于交换环上$GL_3$的同构理论，找到了一种新类型的同构，并得到交换环上$GL_3$之间同构的一般形式．最近，张海权和游宏[36]在假定环上辛群的正规子群问题有肯定解答的前提下，

证明了$Sp_{2n}(R)(n\geqslant 3)$的任一自同构皆为标准形.

利用典型群的正规子群和同余子群的理论，去研究典型群的自同构、同构乃至同态，是一个饶有兴味的问题.

**附注** 最近，李福安[37]讨论了任意交换环上辛群的结构. 他的结果如下:

设R是任意交换环，$n\geqslant 3$. 若J是R的任一理想，则

$$ESp_{2n}(R, J)=[ESp_{2n}(R), ESp_{2n}(J)]=[ESp_{2n}(R), ESp_{2n}(R, J)]$$
$$=[ESp_{2n}(R), GSp_{2n}(R, J)]=[Sp_{2n}(R), ESp_{2n}(R, J)].$$

进而，$Sp_{2n}(R)$的正规子群问题有肯定解答，当且仅当$aR=a^2R+2aR, \forall a\in R$.

这包含了[31—34]的有关结果.

## 参 考 文 献


[1] 华罗庚、万哲先，典型群，上海科技出版社，1963.

[2] Artin, E., Geometric Algebra, Wiley Interscience, New York, 1957.

[3] Dieudonné, J., Geometrie des Groupes Classiques, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[4] O'Meara, O. T., Lectures on Linear Groups, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1974.

[5] O'Meara, O. T., Symplectic Groups, Math. Surveys, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978.

[6] Hahn, A., Algebraic K-theory, Morita theory and the classical groups, pp.58—88, in: Lecture Notes in Math., No. 1185, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[7] Vaserstein, L.N., Canad. Math. Soc., Conference Proceedings, 4(1984), 131—140.

[8] Bass, H., Algebraic K-Theory, Benjamin, New York, 1968.

[9] Wilson, J.S., Proc. Camb. Phil. Soc., 71(1972), 163—177.

[10] Голубчик, И.З., Успехи Математических Наук, 28: 3(1973), 179—180.

[11] Суслин, А. А., Известия Академии Наук СССР, Серия Математическая, 41:2(1977), 235—252.

[12] Vaserstein, L. N., On the normal subgroups of $GL_n$ over a ring, pp.456—465. in: Lecture Notes in Math., No. 854, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[13] Петечук, В.М., Математический Сборник, 117(159): 4(1982), 534—547.

[14] Хлебутин, С. Г., Успехи Математических Наук, 39:3(1984), 245—246.

[15] Vaserstein, L. N., J. Pure Appl. Algebra, 41(1986), 99—112.

[16] Vaserstein, L. N., Proc. Amer. Math. Soc., 96:2(1986), 209—214.

[17] 王路群，数学年刊，5A:2(1984), 229—238.

[18] Bak, A., Subgroups of the general linear group normalized by relative elementary groups, pp. 1—22, in: Lecture Notes in Math., No. 967, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[19] Li Fu-an and Liu Mu-lan, A generalized sandwich theorem, K-Theory, 1: 2(1987), 171—183.

[20] Vaserstein, L. N., Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 99:3(1986), 425—431.

[21] Golubchik, I. Z., On subgroups of the general linear group $GL_n(R)$ over an associative ring R, Communications of the Moscow Mathematical Society.

[22] Суслин, А. А., Об одной теореме Кона, Записки научных семинаров ЛОМИ, т.64, Наука, Ленинград, 1976, 127—130.

[23] Lacroix, N., Canad. J. Math., 21:1(1969), 106—135.

[24] McDonald, B.R., Geometric Algebra over Local Rings, Marcel Dekker, Inc., New York, 1976.
[25] McDonald, B.R., Comm. Algebra, 8:9(1980), 869—888.
[26] 安建碚，数学学报，27:4(1984)，536—539.
[27] Bass, H., Unitary algebraic K-theory, pp.57—265.in:Lecture Notes in Math., No.343, Springer Verlag, Berlin, 1973.
[28] Bak, A., The stable structure of quadratic modules, Thesis, Columbia University, 1969.
[29] Wall, C.T.C., Proc. Camb. Phil. Soc., 67(1970), 243—250.
[30] Veserstain, L.N., Normal subgroups of classical groups over Banach algebras.
[31] 张海权、王路群，数学学报，28:2(1985)，270—278.
[32] Tang Xiangpu and An Jianbei, Acta Mathematica Sinica, 1:1(1985), 1—15.
[33] 王仁发、游宏，数学年刊，5A:1(1984)，33—40.
[34] 曹重光、王路群，数学学报，29:3(1986)，323—326.
[35] 李福安、李尊贤，交换环上$GL_3$的同构，中国科学（A辑），1987，6:590—596.
[36] 张海权、游宏，$Sp_{2n}(R)$的自同构，投数学学报.
[37] Li Fu-an, The structure of symplectic groups over arbitrary commutative rings, Acta Math. Sinica, 3:3(1987), 247—255.

# Normal Subgroups and Congruence Subgroups of Classical Groups

*Li Fu-an* (李福安)

(Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing)

**Abstract**

This paper presents a brief survey of normal subgroups and congruence subgroups of classical groups.