第9卷 第1期
1989年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.1
Feb., 1989

关于《Monotone and Comonotone approximation》一文的注*

刘瑞智

（河南师范大学数学系，新乡）

E.Passow 与 L.Raymon 在文〔1〕的定理1中，得到了任一分段单调函数 $f(x)$ 的共单调逼近度 $E_n^*(f)$ 与 $E_n^*(S)$ 之间的关系，其中S是满足某些光滑条件的函数类．

E.Passow 与 L.Raymon 于文〔1〕中有下述结果：

定理1 若 S^p 表示在 $C^p[a,b]$ 上的函数 g 的集合，它满足 $g^{(p)}$ 在 $[a,b]$ 上的收缩（即 $\omega(g^{(p)},\delta)\le\delta$ 对一切 $\delta>0$），设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$ 是分段单调函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的峰点；令 $\delta=\frac{1}{2}\min\limits_{1\le i\le k}(x_i-x_{i-1})$，设 $\lambda=\lambda_n=[E_n^*(S^p)]^{1/(PH)}$，则当 $p\lambda_n<\delta$ 时，有

$$E_n^*(f)\le p^2 2^{p+1}\omega(f;\lambda_n)$$

我们发现其证明中有两处是有问题的．其一是在证明中，作者从分段单调函数 $f(x)$ 引入 $f^*(x)$：

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x_i), & x_i\le x\le x_i+p\lambda,\ i=1,2,\cdots,k; \\ f(x), & \text{对其他一切 } x. \end{cases}$$

接着断言

$$\omega(f^*;\lambda)\le\omega(f;p\lambda)\le p\omega(f;\lambda). \tag{1}$$

我们可以证明（1）式并不成立．为此构造反例如下：$f(x)=-x\,(0\le x<\frac{1}{2})$，$x-1\,(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2})$，$-(x-2)\,(\frac{3}{2}\le x\le 2)$．这时显然有 $f^*(x)=-x\,(0\le x<\frac{1}{2})$，$-\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}+p\lambda)$，$x-1\,(\frac{1}{2}+p\lambda<x<\frac{3}{2})$，$\frac{1}{2}\,(\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}+p\lambda)$，$-(x-2)\,(\frac{3}{2}+p\lambda<x<2)$，$0\,(2\le x\le 2+p\lambda)$．

下面我们证明（1）不成立．

令 $x'\le x_1+p\lambda<x''$ 且 $x''-x'<\lambda$，有

$$\omega(f^*;\lambda)=\sup_{|x'-x''|\le\lambda}|f^*(x')-f^*(x'')|=|f^*(x_1+p\lambda)-f^*(x_1+(p+1)\lambda)|=(p+1)\lambda.$$

令 $\bar{x}',\bar{x}''\in[x_1,x_2]$ 且 $|\bar{x}'-\bar{x}''|\le p\lambda$，有

$$\omega(f;p\lambda)=\sup_{|\bar{x}'-\bar{x}''|\le p\lambda}|f(\bar{x}')-f(\bar{x}'')|=|f(x_1)-f(x_1+p\lambda)|=p\lambda.$$

* 1986年12月21日收到．

显然$\omega(f^*;\lambda)>\omega(f;p\lambda)$. 从而说明（1）式不成立.

另外，在证明中，作者引入函数

$$g(x)=\frac{1}{\lambda^{p+1}}\int_x^{x+\lambda}\int_{t_p}^{t_p+\lambda}\int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+\lambda}\cdots\int_{t_1}^{t_1+\lambda}f^*(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_p,$$

显然在假设$p\lambda<\delta$下，得不到$g(x)$和$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$中共单调的结果.

故定理1应修改为：

定理Ⅰ′ 若S^p表示在$C^p[a,b]$上的函数g的集合，它满足$g^{(p)}$在$[a,b]$上的收缩（即$\omega(g^{(p)};\delta)\leq\delta$对一切$\delta>0$）. 设$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$是分段单调函数$f(x)$在$[a,b]$上的峰点；令$\delta=\frac{1}{2}\min\limits_{1\leq i\leq k}(x_i-x_{i-1})$，设$\lambda=\lambda_n=[E_n^*(S^p)]^{1/(p+1)}$，则当$(p+1)\lambda<\delta$时，有

$$E_n^*(f)\leq(p+2)^2 2^{p+1}\omega(f;\lambda_n).$$

为证明此定理我们先证下面引理.

引理 $f(x)$为$[a,b]$上的一个分段单调函数，设$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$为其在$[a,b]$上的峰点. 令$\delta=\frac{1}{2}\min\limits_{1\leq i\leq k}(x_i-x_{i-1})$，$\lambda=\lambda_n=[E_n^*(S^p)]^{1/(p+1)}$，又设$f^*(x)$在$[a,b+(p+1)\lambda]$上定义为：

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x_i), & x_i\leq x\leq x_i+(p+1)\lambda,\quad i=1,2,\cdots,k,\\ f(x), & \text{对其他一切 } x.\end{cases}$$

则有

$$\omega(f^*;\lambda)\leq\omega(f;(p+2)\lambda)\leq(p+2)\omega(f;\lambda), \tag{2}$$

$$\|f-f^*\|\leq\omega(f;(p+1)\lambda)\leq(p+1)\omega(f;\lambda). \tag{3}$$

证明 对（2）分三种情形证明.

情形Ⅰ 若$x',x''\in[x_{i-1},x_{i-1}+(p+1)\lambda]$，根据$f^*(x)$的定义及连续模的定义，显然有（2）式成立.

情形Ⅱ：若$x',x''\in[x_{i-1}+(p+1)\lambda,x_i]$，根据$f^*(x)$的定义和连续模的半线性性质及连续模的单调递增性，显然有

$$\omega(f^*;\lambda)=\omega(f;\lambda)\leq\omega(f;(p+2)\lambda)\leq(p+2)\omega(f;\lambda).$$

情形Ⅲ：若$x'\leq x_{i-1}+(p+1)\lambda<x''$且$x''-x'\leq\lambda$时，我们有

$$\omega(f^*;\lambda)=\sup_{|x'-x''|\leq\lambda}|f^*(x')-f^*(x'')|.$$

取$x'=\bar{x}+p\lambda$，则$\bar{x}-x_{i-1}\leq\lambda$，显然$x''=\bar{x}+p\lambda+x''-x'$，这样

$$\begin{aligned}\omega(f^*;\lambda)&=\sup_{|x'-x''|\leq\lambda}|f^*(\bar{x}+p\lambda)-f^*(\bar{x}+p\lambda+x''-x')|\\&=\sup_{|x_{i-1}-(\bar{x}+p\lambda+x''-x')|\leq(p+2)\lambda}|f(x_{i-1})-f(\bar{x}+p\lambda+x''-x')|\\&\leq\omega(f;(p+2)\lambda)\leq(p+2)\omega(f;\lambda).\end{aligned}$$

综合上述三种情形可知不等式（2）是成立的.

由$f^*(x)$的定义及连续模的半线性性质显然有（3）成立.

下面我们证明定理1′：

证明 设$f^*(x)$在$[a, b+(p+1)\lambda]$上定义如下：

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x_i), & x_i \le x \le x_i+(p+1)\lambda,\ i=1,2,\cdots,k, \\ f(x), & \text{对其他一切}x. \end{cases}$$

$f^*(x)$在$[a,b]$和$f(x)$共单调，此外，$f^*(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的单调性可开拓到$[x_{i-1}, x_i+(p+1)\lambda]$，$i=1,2,\cdots k$．设

$$g(x)=\frac{1}{\lambda^{p+1}}\int_x^{x+\lambda}\int_{t_p}^{t_p+\lambda}\int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+\lambda}\cdots\int_{t_1}^{t_1+\lambda}f^*(t)\,dt\,dt_1\cdots dt_p.$$

我们证明f和g是共单调的．若$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上是非减的，则$f^*(x)$在$[x_{i-1}, x_i+(p+1)\lambda]$是非减的，且$g_1(x)=\int_x^{x+\lambda}f^*(t)\,dt$在$[x_{i-1}, x_i+p\lambda]$上非减；$g_2(x)=\int_x^{x+\lambda}\int_{t_1}^{t_1+\lambda}f^*(t)\,dt\,dt_1$在$[x_{i-1}, x_i+(p-1)\lambda]$上非减；重复这个过程（$p+1$）次，我们得出$g(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上是非减的．同理，若$f(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上非增，则$g(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上也非增．因而$g(x)$和$f(x)$是共单调的．

对$g(x)$运用微积分基本定理到p阶，得

$$g^{(p)}(x)=\frac{1}{\lambda^{p+1}}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\int_{x+(p-j)\lambda}^{x+(p-j+1)\lambda}f^*(t)\,dt.$$

由于f^*除在有限个点外是连续的，利用引理中的（2），得

$$|g^{(p)}(x)|\le\frac{2^p}{\lambda^{p+1}}\omega(f^*;\lambda)\le\frac{(p+2)2^p}{\lambda^{p+1}}\omega(f;\lambda).$$

因此$\lambda^{p+1}g(x)/[(p+2)2^p\omega(f;\lambda)]\in S^p$，于是存在某一多项式$Q(x)\in\mathscr{P}_n^*(f)$使得

$$\|\lambda^{p+1}g(x)/[(p+2)2^p\omega(f;\lambda)]-Q(x)\|\le E_n^*(S^p)=\lambda^{p+1}.$$

从而，若$P(x)=(p+2)2^p\omega(f;\lambda)Q(x)/\lambda^{p+1}$，$P(x)\in\mathscr{P}_n^*(f)$且

$$\|g(x)-P(x)\|\le(p+2)2^p\omega(f;\lambda). \tag{4}$$

同样有

$$\|g-f^*\|=\left\|\frac{1}{\lambda^{p+1}}\int_x^{x+\lambda}\int_{t_p}^{t_p+\lambda}\cdots\int_{t_1}^{t_1+\lambda}[f^*(t)-f^*(x)]\,dt\,dt_1\cdots dt_p\right\|$$

$$\le\frac{\omega(f^*;(p+1)\lambda)}{\lambda^{p+1}}\left\|\int_x^{x+\lambda}\int_{t_p}^{t_p+\lambda}\cdots\int_{t_1}^{t_1+\lambda}dt\,dt_1\cdots dt_p\right\|\le(p+1)(p+2)\omega(f;\lambda). \tag{5}$$

现在，从引理的（3）和（4）、（5）有

$$E_n^*(f)\le\|f-P\|\le\|f-f^*\|+\|f^*-g\|+\|g-P\|$$
$$\le[p+1+(p+1)(p+2)+(p+2)2^p]\omega(f;\lambda)\le(p+2)^2 2^{p+1}\omega(f;\lambda).$$

参 考 文 献

[1] E. Passow and L. Raymon, Proc. Amer. Math. Soc., 42(1974), 390—394.

A Note on 《Monotone and Comonotone Approximation》

Liu Ruizhi

(Henan Normal University, Xinxiang)

Abstract

In this note, we show two misfits of theorem 1 involved in the paper 《Monotone and comonotone approximation》 by Passow, E. and Raymon, L., where a counter example and a proof of modifying theorem 1' are given.