第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vo.9, No.2
May, 1989

Littlewood恒等式的交错模拟及多重拓广*

初 文 昌

（中国科学院系统科学研究所）

设S_n表示n个文字$\{1,2,\cdots,n\}$的排列所成的对称群．Littlewood[1](1950, p.85)利用归纳法原理证得

命题1

$$\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n}x_{\sigma(i)}\Big/\sum_{j=i}^{n}x_{\sigma(j)}=1. \tag{1}$$

这里我们将研究类似的对称求和公式及其推论．主要工具便是下述引理

引理2（Macdonald[2], 1979, p.106）.

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-tx_iy}{1-x_iy}=1+(1-t)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy}{1-x_iy}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-tx_j}{x_i+x_j} \tag{2}$$

由此我们便可叙述命题1的交错形式．

定理3 设τ为S_n上的逆序数函数，则

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}\prod_{i=1}^{n}x_{\sigma(i)}\Big/\sum_{j=i}^{n}x_{\sigma(j)}=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j} \tag{3}$$

证明 应用数学归纳法．当$n=2$时容易验明（3）式正确．

假设（3）式对n成立．则对$n+1$, $\sigma\in S_{n+1}$可以通过定义$\sigma^2(1)=\sigma'(1)$, $\sigma(i)=\sigma'(i)$ $(i\neq\sigma(1))$而诱导出集合$\{1,2,\cdots,n,n+1\}\setminus\{\sigma(1)\}$上的排列$\sigma'$，这类$\sigma'$构成所述集合的$n$元对称群$S_n'$．由此诱导关系引出的递序数变化是$\tau(\sigma)=\sigma(1)-1+\tau(\sigma')$．基于上述分析，可作如下分裂：

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}}(-1)^{\tau(\sigma)}\prod_{i=1}^{n+1}x_{\sigma(i)}\Big/\sum_{j=i}^{n+1}x_{\sigma(j)}$$

$$=\sum_{\sigma(1)=1}^{n+1}(-1)^{\sigma(1)-1}\frac{x_{\sigma(1)}}{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}\sum_{\sigma'\in S_n'}(-1)^{\tau(\sigma')}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq\sigma(1)}}^{n+1}x_{\sigma'(i)}\Big/\sum_{\substack{j=i\\ j\neq\sigma(1)}}^{n+1}x_{\sigma(j)}$$

对内层和号应用归纳法假设，上式变为

$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{x_i}{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}\prod_{\substack{1\leq s<t\leq n+1\\ s,t\neq i}}\left(\frac{x_s-x_t}{x_s+x_t}\right)$$

---

* 1987年10月26日收到．

$$=\frac{\prod_{1\le i<j\le n+1}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}}{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\left(\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)$$

对上式的后一和号，结合（2）式的特例：$t=-1$并计算y的系数，便有：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

由此便知（3）式对$n+1$正确．根据归纳法原理便知对任何自然数n,(3)式成立．定理3证毕．

若以A_n表示S_n的交代子群，$O_n=S_n\setminus A_n$．结合（1）及（3）则有下述推论．

定理 4

i．
$$\sum_{\sigma\in A_n}\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j)}\Big/\sum_{i=j}^{n}x_{\sigma(i)}=\frac{1}{2}\{1+\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\}$$

ii．
$$\sum_{\sigma\in O_n}\prod_{j=1}^{n}x_{\sigma(j)}\Big/\sum_{i=j}^{n}x_{\sigma(i)}=\frac{1}{2}\{1-\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i-x_j}{x_i+x_j}\}$$

若以$S_{\bar m}$表示多重集合$\{1^{m_1},2^{m_2},\cdots,n^{m_n}\}$的排列集合，则有命题1的多重形式．

定理 5 设$|\overline{m}|=\sum_{i=1}^{n}m_i$，则

$$\sum_{\sigma\in S_{\bar m}}\prod_{k=1}^{|\overline{m}|}\frac{x_{\sigma(k)}}{x_{\sigma(k)}+x_{\sigma(k+1)}+\cdots+x_{\sigma(|\overline{m}|)}}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}m_i!}$$

上式中取$\overline{m}=(1,1,\cdots,1)$便给出命题1.

类似于命题1，定理5的证明可利用归纳法完成，此处从略．

参 考 文 献

[1] Littlewood, D.E., The the theory of qroup characters, 2nd ed., 1950, Oxford Unir. Prass.

[2] Macdonald, I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon press, 1979, Oxford.

(from 202)

References

[1] 谢邦杰，超穷数与超穷论法，吉林人民出版社，1979.

[2] Du Xiankun, The structure of generalized radical rings, Northeastern Math. J. (to appear).