第9卷 第2期
1989年5月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION
Vol.9 No.2
May, 1989

《拟-赋范 Abel 群的实内插方法的几个问题》*

刘吉善

(大连水产学院)

将赋范向量空间的实内插方法推广到拟-赋范Abelian群上去，所得到的结果在[1]及[5]中有所论述。应该指出的是后一种情形不但以c-三角不等式代替通常的三角不等式，而且对参数q的适应范围也有进一步扩充，这就必须对原来的定义及其有关结果的证明给以必要的不同于前者的论述。本文就是为了适应这种需要，在拟-赋范Abelian群上对[1]～[4]中的结果加以研究和讨论，并给出其相应的结果和必要的证明。

除特殊说明外，文中采用的符号都参照[2]～[4].

定理1 设A_j是c_j-赋范的 Abel 群($j=0,1$)且$\overline{A}=(A_0, A_1)$；$a_\nu=k(2^\nu, a;\overline{A})$ 则 $a\in k_{\theta,q}(\overline{A})$ iff $(a_\nu)_{-\infty}^{\infty}\in\lambda^{\theta,q}$ 且

i) 当$0<\theta<1$, $0<q<\infty$时

$$2^{-\theta}(\ln 2)^{1/q}\|a_\nu\|_{\lambda^{\theta,q;k}}\leqslant\|a\|_{\theta,q;k}\leqslant 2(\ln 2)^{1/q}\|a_\nu\|_{\lambda^{\theta,q;k}} \tag{1}$$

ii) 当$0<\theta<1$, $q=\infty$时

$$2^{\theta}\|a_\nu\|_{\lambda^{\theta,\infty;k}}\leqslant\|a\|_{\theta,\infty;k}\leqslant 2\|a_\nu\|_{\lambda^{\theta,\infty;k}} \tag{2}$$

证明 (I) $k_{\theta,q}(\overline{A})$是$c$-赋范的．$k_{\theta,q}(\overline{A})$中的元的范数定义见[2]中的予备知识，由[1]中§3.10知只要证明c-三角不等式成立即可．

i) 当$0<\theta<1$, $0<q<\infty$时；由[1]中的引理3,10.3及3,11.1不难证明

$$\|a+b\|_{\theta,q;k}\leqslant c(\|a\|_{\theta,q;k}+\|b\|_{\theta,q;k}),\quad 其中\ c=\max(1,2^{(1-q)/q})c_0^{1-\theta}c_1^{\theta}$$

ii) 当$0<\theta<1$ $q=\infty$时；设$a=a_0+a_1$, $b=b_0+b_1$其中$a_0,b_0\in A_0$, $a_1,b_1\in A_1$,

因为 $t^{-\theta}k(t,a+b;\overline{A})\leqslant t^{-\theta}c_0[k(\frac{c_1}{c_0}t, a;\overline{A})+k(\frac{c_1}{c_0}t, b;\overline{A})]$

$$=c_0[t^{-\theta}k(\frac{c_1}{c_0}t,a;\overline{A})+t^{-\theta}k(\frac{c_1}{c_0}, b;\overline{A})]$$

于是 $$\|a+b\|_{\theta,\infty;k}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}k(t,a+b;\overline{A})$$

$$\leqslant\sup_{0<t<\infty}\{c_0[t^{-\theta}k(\frac{c_1}{c_0}t,a;\overline{A})+t^{-\theta}k(\frac{c_1}{c_0}t, b;\overline{A})]\}$$

因为 $c_j\geqslant 1$, ($j=0,1$) 令 $y=\frac{c_1}{c_0}t$

1987年10月9日收到

故 $$\|a+b\|_{\theta,\infty;k}\leqslant \sup_{0<y<\infty} c_0[(\frac{c_0}{c_1})^{-\theta}y^{-\theta}k(y,a;\overline{A})+(\frac{c_0}{c_1})^{-\theta}y^{-\theta}k(y,b;\overline{A})]$$

$$=\sup_{0<y<\infty} c_0^{1-\theta}c_1^{\theta}[y^{-\theta}k(y,a;\overline{A})+y^{-\theta}k(y,b;\overline{A})]\leqslant c(\|a\|_{\theta,\infty;k}+\|b\|_{\theta,\infty;k}),$$

其中 $c=c_0^{1-\theta}c_1^{\theta}$ （或 $c=\max(c_0,c_1)$）

（Ⅱ） $\lambda^{\theta,\infty;k}$是$c$-赋范的，

i） 当$0<\theta<1$ $0<q<\infty$ 时；因为 $\|a_v\|_{\lambda^{\theta,q;k}}$是以离散形式定义的，故可将［1］中引理3.10.3的结论应用到离散情形，得出相应的结果．

ii） 当$0<\theta<1$ $q=\infty$时；仿本文（Ⅰ）中ii)的证明，只需将连续变量变换为离散情形即可．

（Ⅲ）定理的证明可仿［2］中（二）进行．

定理 2 设A_j是c_j-赋范的 Abel 群（$j=0,1$）且$\overline{A}=(A_0,A_1)$ 则 $a\in J_{\theta,q}(\overline{A})$ iff 存在$u_v\in\triangle(\overline{A})$（$-\infty<v<\infty$） 因而$a=\sum_v u_v$ 在$\sum(\overline{A})$中收敛．使得 $(J(2^v,u_v))\in\lambda^{\theta,q}$； 此外，还有

$$\|a\|_{\theta,q;J}\sim\inf_{(u_v)}\|J(2^v,u_v)\|_{\lambda^{\theta,q;J}} \tag{3}$$

证明 首先$J_{\theta,p}(\overline{A})$的定义是满足下列条件的元素之全体，即 $a\in J_{\theta,q}(\overline{A})$是指

$$\|a\|_{\theta,q;J}=\inf_{(u_v)}(\sum_v\int_{2^v}^{2^{v+1}}(t^{-\theta}J(t,\frac{u_v}{\ln 2}))^q\frac{dt}{t})^{1/q}<\infty, \tag{4}$$

$$(0<\theta<1,\ 0<q<\infty).$$

$$\|a\|_{\theta,\infty;J}=\inf_{(u_v)}\operatorname{Vari}\sup_{\substack{0<t<\infty\\ -\infty<v<\infty}}(t^{-\theta}J(t,\frac{u_v}{\ln 2}))<\infty,\ (0<\theta<1,\ q=\infty). \tag{5}$$

其中 $a=\sum_v u_v$ （$u_v\in\triangle(\overline{A})$，$v$是整数）在$\sum(\overline{A})$中收敛．

关于$\lambda^{\theta,q;J}$中的范数的定义见［3］．

其次，$J_{\theta,p}(\overline{A})$是$c$-赋范的证明与$k_{\theta,q}(\overline{A})$是$c$-赋范的证明类似，可参照定理1进行．

最后，证明定理的结论．

i） 当$0<\theta<1$ $0<q<\infty$ 时，若 $a\in J_{\theta,q}(\overline{A})$，由［1］中引理3,2.3可以得出 $\inf_{(u_v)}\|J(2^v,u_v)\|_{\lambda^{\theta,q;J}}\leqslant c\|a\|_{\theta,q;J}$； 故 $a\in\lambda^{\theta,q;J}$．

若 存在 $u_v\in\triangle(\overline{A})$（$-\infty<v<\infty$）； 则 $a\in\sum_v u_v$，在$\sum(\overline{A})$中收敛，且

$$(J(2^v,u_v))\in\lambda^{\theta,q}.$$

因为 $$(\sum_v\int_{2^v}^{2^{v+1}}(t^{-\theta}J(t,\frac{u_v}{\ln 2}))^q\frac{dt}{t})^{1/q}\leqslant(\sum_v\int_{2^v}^{2^{v+1}}(2^{-v\theta}\frac{2}{\ln 2}J(2^v,u_v))^q\frac{dt}{t})^{1/q}$$

$$=\frac{2}{\ln 2}(\sum_v(2^{-v\theta}J(2^v,u_v))^q\int_{2^v}^{2^{v+1}}\frac{dt}{t})^{1/q}=\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}(\sum_v(2^{-v\theta}J(2^v,u_v))^q)^{1/q}$$

$$=\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}\|J(2^v,u_v)\|.$$

由（4）式知

$$\|a\|_{\theta,q;J}\leqslant c\inf_{(u_v)}\|J(2^v,u_v)\|_{\lambda^{\theta,q;J}}；\text{其中}\quad c=\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}.$$

ii）当$0<\theta<1$，$q=\infty$时，若$a\in J_{\theta,\infty}(\overline{A})$，则因$J(2^{\nu},u_{\nu})\leqslant J(t,u_{\nu})\leqslant J(t,\frac{u_{\nu}}{\ln 2})$；当$2^{\nu}\leqslant 1<2^{\nu+1}$时有，$2^{-(\nu+1)\theta}J(2^{\nu},u_{\nu})\leqslant t^{-\theta}J(t,\frac{u_{\nu}}{\ln 2})$；即$2^{-\nu\theta}J(2^{\nu},u_{\nu})\leqslant 2^{\theta}(t^{-\theta}J(t,\frac{u_{\nu}}{\ln 2}))$.

从而 $\inf\limits_{(u_{\nu})}\|J(2^{\nu},u_{\nu})\|_{\lambda^{\theta,\infty;J}}\leqslant c\|a\|_{\theta,q;J}$ 故 $a\in\lambda^{\theta,\infty;J}$.

若有 $a=\sum\limits_{\nu}u_{\nu}$ $(u_{\nu}\in\triangle(\overline{A}))$ 且 $J(2^{\nu},u_{\nu})\in\lambda^{\theta,\infty;J}$，则当 $2^{\nu}<t<2^{\nu+1}$时有

$$J(t,\frac{u_{\nu}}{\ln 2})\leqslant\frac{1}{\ln 2}J(2^{\nu+1},u_{\nu})\leqslant\frac{2}{\ln 2}J(2^{\nu},u_{\nu}).$$

进而 $$t^{-\theta}J(t,\frac{u_{\nu}}{\ln 2})\leqslant 2^{-\nu\theta}\frac{2}{\ln 2}J(2^{\nu},u_{\nu})$$

因此由（5）得出：

$$\|a\|_{\theta,\infty;J}\leqslant c\inf\|J(2^{\nu},u_{\nu})\|_{\lambda^{\theta,\infty;J}},\text{ 其中 } c=\frac{2}{\ln 2},\text{ 故 } a\in J_{\theta\infty}(\overline{A}).$$

综上知在$0<\theta<1$，$0<q\leqslant\infty$时结论成立，且有

$$\|a\|_{\theta,q;J}\sim\inf_{(u_{\nu})}\|J(2^{\nu},u_{\nu})\|_{\lambda^{\theta,q;J}}.$$

引理 设A_j是c_j赋范的 Abel 群，$(j=0,1)$且$\overline{A}=(A_0,A_1)$.

若$\min(1,1/t)k(t,a)\to 0$（当$t\to 0$ 或 $t\to\infty$时），则对任意$\varepsilon>0$，存在a的一个表示$a=\sum\limits_{\nu}u_{\nu}$在$\Sigma(\overline{A})$中收敛，使得

$$J(2^{\nu},u_{\nu})\leqslant(\beta+\varepsilon)k(2^{\nu},a).$$

这里β是不超过$3\cdot\max(c_0,c_1)$的常数.

证明 首先，因为 $k(2^{\nu},a)=\inf\limits_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0}+2^{\nu}\|a_1\|_{A_1})$；对任意整数$\nu$，存在

$a=a_{0,\nu}+a_{1,\nu}$ 使得对任意$\varepsilon>0$，有

$\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+2^{\nu}\|a_{1,\nu}\|_{A_1}\leqslant(1+\varepsilon/3c)k(2^{\nu},a)$，其中 $c=\max(c_0,c_1)$，

根据假设，不难推出存在分解

$a=\sum\limits_{\nu}u_{\nu}$在$\Sigma(\overline{A})$中收敛，这里$u_{\nu}$为$u_{\nu}=a_{0,\nu}-a_{0,\nu-1}=a_{1,\nu-1}-a_{1,\nu}$.

其次，由于

$$\begin{aligned}
J(2^{\nu},u_{\nu})&=\max(\|a_{0,\nu}-a_{0,\nu-1}\|_{A_0},2^{\nu}\|a_{1,\nu-1}-a_{1,\nu}\|_{A_1})\\
&\leqslant\max[c_0(\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+\|a_{0,\nu-1}\|_{A_0}),c_1 2^{\nu}(\|a_{1,\nu-1}\|_{A_1}+\|a_{1,\nu}\|_{A_1})]\\
&\leqslant\max(c_0,c_1)\max[(\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+\|a_{0,\nu-1}\|_{A_0},2^{\nu}(\|a_{1,\nu-1}\|_{A_1}+\|a_{1,\nu}\|_{A_1})]\\
&\leqslant c(\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+\|a_{0,\nu-1}\|_{A_0}+2^{\nu}\|a_{1,\nu-1}\|_{A_1}+2^{\nu}\|a_{1,\nu}\|_{A_1})\\
&\leqslant c[\|a_{0,\nu}\|_{A_0}+2^{\nu}\|a_{1,\nu}\|_{A_1}+2(\|a_{0,\nu-1}\|_{A_0}+2^{\nu-1}\|a_{1,\nu-1}\|_{A_1})]\\
&\leqslant 3c(1+\varepsilon/3c)k(2^{\nu},a)\\
&=(3c+\varepsilon)k(2^{\nu},a)=(\beta+\varepsilon)k(2^{\nu},a)
\end{aligned}$$

其中 $$3c=3\cdot\max(c_0,c_1)$$

引理成立.

定理 3 设A_j是c_j赋范的 Abel 群，$(j=0,1)$且$\overline{A}=(A_0,A_1)$.

则 $J_{\theta,q}(\overline{A})=k_{\theta,q}(\overline{A})$具有拟范数的等价性$(0<\theta<1,\ 0<q\leqslant\infty)$.

证明 i）当$0<\theta<1$，$0<q<\infty$时，$J_{\theta,q}(\overline{A})\subseteq k_{\theta,q}(\overline{A})$的证明见[1]中定理3,11.3.

现在证明相反的结论．

若$a\in k_{\theta,q}(\overline{A})$当$2^{\nu}\leqslant t<2^{\nu+1}$时，有 $J(t,\frac{u_\nu}{\ln 2})\leqslant J(2^{\nu+1},\frac{u_\nu}{\ln 2})\leqslant\frac{2}{\ln 2}J(2^{\nu},u_\nu)$．

根据（4）式及引理知

$$\|a\|_{\theta,q,J}\leqslant\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}\inf\|J(2^{\nu},u_\nu)\|_{\lambda^{\theta,q,J}}$$

$$\leqslant\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}(\beta+\varepsilon)\|k(2^{\nu},a)\|_{\lambda^{\theta,q,k}}$$

再根据定理 1 知

$$\|a\|_{\theta,q,J}\leqslant\frac{2}{\ln 2}(\ln 2)^{1/q}(\beta+\varepsilon)\frac{1}{(\ln 2)^{1/q}}2^{\theta}\|a\|_{\theta,q,k}\leqslant\frac{4}{\ln 2}(\beta+\varepsilon)\|a\|_{\theta,q,k}$$

因此，$a\in J_{\theta,q}(\overline{A})$；故 $k_{\theta,q}(\overline{A})\subseteq J_{\theta,q}(\overline{A})$．

ii）当 $0<\theta<1$，$q=\infty$时，一方面，对任何 $a\in J_{\theta,\infty}(\overline{A})$有 $a=\sum\limits_{\nu}u_\nu$（$u_\nu\in\triangle(\overline{A})$）在$\Sigma(\overline{A})$中收敛．此时，$a=\sum\limits_{\nu}u_\nu=\sum\int_{2^{\nu}}^{2^{\nu+1}}\frac{u_\nu}{\ln 2}\frac{dt}{t}$ 由（4）中引理 2 及基本定理之证明知

$$t^{-\theta}k(t,a)\leqslant\sum_{\nu}\int_{2^{\nu}}^{2^{\nu+1}}t^{-\theta}k(t,\frac{u_\nu}{\ln 2})\frac{ds}{s}\leqslant\sum_{\nu}\int_{2^{\nu}}^{2^{\nu+1}}t^{-\theta}\min(1,\frac{t}{s})J(s,\frac{u_\nu}{\ln 2})\frac{ds}{s}$$

$$=\sum_{\nu}\int(\frac{s}{y})^{-\theta}\min(1,\frac{t}{ty})J(s,\frac{u_\nu}{\ln 2})\frac{dy}{y}=\sum_{\nu}\int s^{-\theta}J(s,\frac{u_\nu}{\ln 2})y^{\theta}\min(1,\frac{1}{y})\frac{dy}{y}$$

$$\leqslant c_1\ \underset{\substack{0<s<\infty\\ -\infty<\nu<\infty}}{\text{vari sup}}\ s^{-\theta}J(s,\frac{u_\nu}{\ln 2})$$ （积分限按变换：$s=yt$给出）．

其中，$c_1=\int_0^{\infty}y^{\theta}\min(1,\frac{1}{y})\frac{dy}{y}$是收敛的．于是 $\|a\|_{\theta,\infty,k}\leqslant c_1\|a\|_{\theta,\infty,J}$．

另一方面，设$a\in k_{\theta,\infty}(\overline{A})$，仿（4）中基本定理的证明可知，当$t\to 0$ 或$t\to\infty$时均有$\min(1,1/t)k(t,a)\to 0$．由引理知a有表示$a=\sum\limits_{\nu}u_\nu$ 在$\Sigma(\overline{A})$中收敛（$u_\nu\in\triangle(\overline{A})$）且

$$J(2^{\nu},u_\nu)\leqslant(\beta+\varepsilon)k(2^{\nu},a)$$

这里β是不超过$3\cdot\max(c_0,c_1)$的常数．

于是 $$J(t,\frac{u_\nu}{\ln 2})\leqslant J(2^{\nu+1},\frac{u_\nu}{\ln 2})\leqslant\frac{2}{\ln 2}J(2^{\nu},u_\nu)\leqslant\frac{2}{\ln 2}(\beta+\varepsilon)k(2^{\nu},a)$$

从而 $$t^{-\theta}J(t,\frac{u_\nu}{\ln 2})\leqslant ct^{-\theta}k(t,a).$$

故得 $\|a\|_{\theta,\infty,J}\leqslant c\|a\|_{\theta,\infty,k}$；其中 $c=\frac{2}{\ln 2}(\beta+\varepsilon)$．

综上知 $k_{\theta,q}(\overline{A})=J_{\theta,q}(\overline{A})$；对于$0<\theta<1$，$0<q\leqslant\infty$成立，且范数是等价的．定理证毕．

参 考 文 献

［1］Jöran Bargh, Jörgen Löfström:《Interpolatian spaces an introduction》

［2］陈广荣，刘吉善:《内插空间中的一个估值问题》，内蒙古师大学报（自然科学），1985第第二期．

［3］刘吉善，陈广荣:《关于J 方法的一个基本引理》，内蒙古师大学报（自然科学），1986年第一期．

［4］刘吉善:《关于内插空间的等价性定理》。辽宁大学学报（自然科学），1986年第一期．

［5］Peetre, J; Sparr, G:《Interpolation of normed Abelian groups》，Ann Mat Pura Appl．92，217 262(1972)．